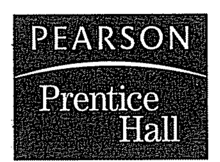
# Introducción al Cálculo

## Problemas y ejercicios resueltos

**JOSÉ RAMÓN FRANCO BRAÑAS**
*Universidad de La Laguna*






Madrid • México • Santafé de Bogotá • Buenos Aires • Caracas • Lima • Montevideo
San Juan • San José • Santiago • São Paulo • White Plains

Datos de catalogación bibliográfica

**INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO**
**José Ramón Franco Brañas**

PEARSON EDUCACIÓN, S. A., Madrid, 2003
ISBN 10: 84-205-3676-8
ISBN 13: 978-84-205-3676-7
Materia: Cálculo 372

Formato 195 × 270 mm Páginas: 320


Ribera del Loira, 28
28042 MADRID

**INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO**
**José Ramón Franco Brañas**

**ISBN 10: 84-205-3676-8**
**ISBN 13: 978-84-205-3676-7**
Depósito legal: M. 13.985-2006
PRENTICE HALL es un sello editorial autorizado de PEARSON EDUCACIÓN, S.A.

Última reimpresión, 2006

Equipo editorial:
Editora: Isabel Capella
Técnico editorial: Marta Caicoya

Equipo de producción:
Director: José A. Clares
Técnico: Isabel Muñoz

Diseño de cubierta: Equipo de diseño de Pearson Educación S.A.

Impreso por: Gráficas Rógar, S.A.

IMPRESO EN ESPAÑA - PRINTED IN SPAIN

Este libro ha sido impreso con papel y tintas ecológicos

# ÍNDICE GENERAL

# PRÓLOGO

Este texto trata de ser un puente entre la enseñanza media y la enseñanza universitaria. Nuestra intención al escribir estas páginas fue la de proporcionar al alumno los conocimientos básicos para seguir con aprovechamiento un primer curso de Cálculo en una carrera técnica. Así, este libro va primordialmente dirigido a aquellos alumnos que inician sus estudios universitarios. También puede ser utilizado como libro de texto en un curso elemental de Cálculo en las distintas Escuelas Universitarias de Ingeniería.

Por otra parte, en el texto se presupone el conocimiento de la Geometría analítica y la Trigonometría.

En cada capítulo, las explicaciones teóricas van acompañadas de ejemplos aclaratorios. Además, se proponen 700 ejercicios, la mitad totalmente resueltos y el resto con sus soluciones, que tratan de aclarar los conceptos teóricos, sin detenerse en posibles casos particulares.

Por último, queremos expresar nuestro agradecimiento a todos los profesores y a todos los estudiantes que nos ayudaron con sus sugerencias y críticas.

José Ramón Franco Brañas

Ponte Aranga, agosto de 2002

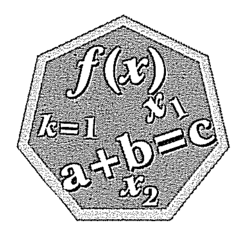
www.elsolucionario.net

# SÍMBOLOS Y EXPRESIONES

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\alpha$ | alfa | $\iota$ | iota | $\rho$ | ro |
| $\beta$ | beta | $\kappa$ | kappa | $\Sigma, \sigma$ | sigma |
| $\Gamma, \gamma$ | gamma | $\Lambda, \lambda$ | lambda | $\tau$ | tau |
| $\Delta, \delta$ | delta | $\mu$ | mu | $\Upsilon, \upsilon$ | ipsilon |
| $\epsilon$ | epsilon | $\nu$ | nu | $\Phi, \phi$ | fi |
| $\zeta$ | dseta | $\Xi, \xi$ | xi | $\chi$ | ji |
| $\eta$ | eta | $O, o$ | omicron | $\Psi, \psi$ | psi |
| $\Theta, \theta$ | theta | $\Pi, \pi$ | pi | $\Omega, \omega$ | omega |

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\mathbb{N}$ | conjunto de los números naturales | $A \cup B$ | unión de los conjuntos $A$ y $B$ |
| $\mathbb{Z}$ | conjunto de los números enteros | $A \cap B$ | intersección de los conjuntos $A$ y $B$ |
| $\mathbb{Q}$ | conjunto de los números racionales | $/$ | tal que |
| $\mathbb{Q}^+$ | conjunto de los números racionales positivos | $\exists$ | existe |
| $\mathbb{R}$ | conjunto de los números reales | $\forall$ | para todo |
| $\mathbb{R}^+$ | conjunto de los números reales positivos | $A \times B$ | producto cartesiano de $A$ por $B$ |
| $\mathbb{C}$ | conjunto de los números complejos | $A - B$ | diferencia de los conjuntos $A$ y $B$ |
| $\Longrightarrow$ | implicación | $\approx$ | aproximadamente |
| $\Leftrightarrow$ | doble implicación | $A \subset B$ | $A$ es subconjunto de $B$ |
| $\wedge$ | y (conjunción lógica) | $A \subseteq B$ | $A$ es subconjunto o es igual a $B$ |
| $\vee$ | o (disyunción lógica) | $x \notin A$ | $x$ no pertenece al conjunto $A$ |
| $x \in A$ | $x$ pertenece al conjunto $A$ | | |

CAPÍTULO 1




# EL NÚMERO REAL

Un estudio riguroso del número real haría necesaria su construcción formal. Pero, mas que su construcción, lo que interesa son sus propiedades para el posterior desarrollo del Cálculo. A lo largo del siglo XIX se perfilaron tres teorías distintas: 1) la axiomática (Weierstrass); 2) la que emplea sucesiones de Cauchy; 3) la que procede mediante cortaduras (Dedekind). Se ha preferido, en cambio, comenzar con una visión intuitiva de $\mathbb{R}$ y presentar una lista de propiedades algebraicas ($\mathbb{R}$ es un cuerpo conmutativo), a partir de las que se puedan deducir otras propiedades. A continuación, se presentarán las propiedades de "orden" ($\mathbb{R}$ es un cuerpo ordenado) y, por último, se presentará la propiedad de "completitud" ($\mathbb{R}$ es un cuerpo ordenado completo). La exposición será más asequible si se hace de este modo.

## 1.1. INTRODUCCIÓN

El conjunto de los números naturales $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ resulta insuficiente, por ejemplo, para encontrar solución a la ecuación $x + 1 = 0$, ya que $-1$ no es un número natural. Es necesario, por tanto, ampliar el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales e introducir los conjuntos $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$ (que permite resolver ecuaciones de la forma $2x - 3 = 0$).

■ PROPOSICIÓN 1.1 *El par* $(\mathbb{N}, +)$ *es un semigrupo abeliano*[1].

DEMOSTRACIÓN. En efecto, el par $(\mathbb{N}, +)$ es un semigrupo, ya que la operación $+$ es interna y asociativa en $\mathbb{N}$. Además, por ser conmutativa, $(\mathbb{N}, +)$ es semigrupo abeliano. ■

■ PROPOSICIÓN 1.2 *El par* $(\mathbb{Z}, \cdot)$ *es semigrupo abeliano con elemento neutro.*

■ PROPOSICIÓN 1.3 *El par* $(\mathbb{Z}, +)$ *es grupo abeliano*[2].

---

[1] Se dice que el par $(A, *)$ es un semigrupo si se verifica que: 1) La operación $*$ es interna en $A$: $x * y \in A$, $\forall x, y \in A$. 2) La operación $*$ es asociativa en $A$: $x * (y * z) = (x * y) * z$, $\forall x, y, z \in A$.

Si la operación $*$ es conmutativa, el semigrupo se llama abeliano o conmutativo.

[2] Se dice que el par $(A, *)$ es un grupo si se verifica que: 1) La operación $*$ es interna en $A$: $x * y \in A$, $\forall x, y \in A$. 2) La operación $*$ es asociativa en $A$: $x*(y*z) = (x*y)*z$, $\forall x, y, z \in A$. 3) Existe un elemento neutro $e$ en $A$: $x*e = e*x = x$, $\forall x \in A$. 4) Existe elemento simétrico $x' \in A$, $\forall x \in A$: $x * x' = x' * x = e$.

Si la operación $*$ es conmutativa, el grupo se llama abeliano o conmutativo.

DEMOSTRACIÓN. La operación $+$ es interna y asociativa en $\mathbb{Z}$ y $0 \in \mathbb{Z}$ es el elemento neutro. Además, $\forall x \in \mathbb{Z}$, $\exists(-x) \in \mathbb{Z}$, tal que $x + (-x) = (-x) + x = 0$. Por ser conmutativa la operación $+$ en $\mathbb{Z}$, el par $(\mathbb{Z}, +)$ es grupo abeliano. ■

■ PROPOSICIÓN 1.4 *La terna $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ es un anillo conmutativo*[3].

DEMOSTRACIÓN. En efecto, ya que $(\mathbb{Z}, +)$ es grupo abeliano y la operación $\cdot$ es interna, asociativa y distributiva respecto de la operación $+$. Como existe elemento neutro en $\mathbb{Z}$ para el producto $(1 \in \mathbb{Z})$, se dice que $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ es un anillo con elemento unidad. Por ser la operación $\cdot$ conmutativa, el anillo es conmutativo o abeliano. ■

## 1.2. EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS RACIONALES

Sea el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales. Si se considera una recta y se elige en ella un origen O y una determinada unidad de medida para la medición de segmentos, se puede tomar para cada número racional $x$ un segmento de igual longitud que, llevado sobre la recta a partir del origen O hacia la derecha o hacia la izquierda, según que $x$ sea positivo o negativo, alcanza un punto final $p$ que puede considerarse como el punto de la recta correspondiente al número racional $x$. El número racional cero corresponde al origen O. De este modo, a cada número racional $x$ le corresponde un único $p$ de la recta.

Es de la mayor importancia el hecho de que en la recta haya infinitos puntos que no corresponden a ningún número racional. La recta es infinitamente más rica en puntos que $\mathbb{Q}$ en números.

En efecto, si se consideran dos elementos de $\mathbb{Q}$, por ejemplo, $1/3$ y $1/2$, al sumarlos y dividirlos por 2 se obtiene el número racional correspondiente, en la recta, al punto medio de ambos:

$$(1/2 + 1/3)/2 = 5/12$$

El número racional $(1/3 + 5/12)/2 = 9/24$ corresponde a su vez al punto medio de $1/3$ y $5/12$. Si se repite el proceso indefinidamente, se encontrarán infinitos números racionales entre $1/3$ y $1/2$. Se puede concluir que, dados dos números racionales, por próximos que estén, existen infinitos números racionales entre ellos.

Se podría pensar, a la vista de lo anterior, que los números racionales recubren completamente la recta numérica. Esto no es cierto, ya que:

■ TEOREMA 1.1 *$\sqrt{2}$ no es un número racional.*

DEMOSTRACIÓN. Para demostrarlo, se supone que $\sqrt{2}$ es racional: $\exists\ a/b \in \mathbb{Q}\ /\ \sqrt{2} = a/b$, siendo a/b una fracción irreducible, esto es, $a$ y $b$ son primos entre sí. Elevando al cuadrado: $2 = a^2/b^2 \Longrightarrow a^2 = 2 \cdot b^2$. Por tanto, $a^2$ es par. En consecuencia, también lo es $a$ (ver problema resuelto 1.4). Si $a$ es par, existe un número natural $m$ tal que: $a = 2m \Longrightarrow a^2 = (2m)^2 = 2b^2 \Longrightarrow 2m^2 = b^2 \Longrightarrow b^2$ par $\Longrightarrow b$ par. Entonces, $a$ y $b$ son pares, en contra de la hipótesis de que $a/b$ era irreducible. ■

Por tanto, entre los números racionales existe otro tipo de números, a los que se llama *irracionales*, cuyo conjunto se simboliza con la letra $\mathbb{I}$.

Por otra parte, es sencillo representar un número racional en la recta numérica. Por ejemplo, el número 2/3 (ver Figura 1.1) es fácil situarlo mediante un procedimiento geométrico simple: se traza una semirrecta cualquiera con origen en $O$ y se toma sobre ella un segmento de longitud arbitraria OC; se divide $OC$ en tres partes iguales: $OA$, $AB$ y $BC$; se une el punto $C$ con el punto correspondiente al 1 en la recta y se traza una paralela por $B$, siendo su intersección con la recta numérica el lugar de 2/3.

[3] Se dice que la terna $(A, +, \cdot)$ es un anillo si se verifica que: 1) El par $(A, +)$ es grupo abeliano. 2) La operación $\cdot$ es interna en $A$: $x \cdot y \in A,\ \forall x, y \in A$. 3) La operación $\cdot$ es asociativa en $A$: $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z,\ \forall x, y, z \in A$. 4) La operación $\cdot$ es distributiva respecto a $+$: $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z,\ \forall x, y, z \in A$.
Si la operación $\cdot$ es conmutativa, el anillo se llama abeliano o conmutativo.

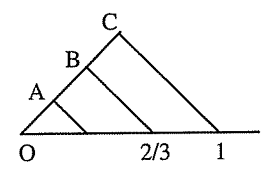



**Figura 1.1**

Para situar $\sqrt{2}$, se observa que $\sqrt{2}$ es la hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos iguales a la unidad (ver Figura 1.2):

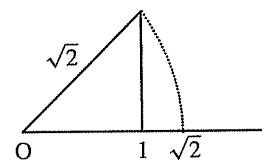



**Figura 1.2**

■ PROPOSICIÓN 1.5 $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ *es un cuerpo conmutativo*[4].

DEMOSTRACIÓN. En efecto, ya que los pares $(\mathbb{Q}, +)$ y $(\mathbb{Q}-\{0\}, \cdot)$ son grupos abelianos y la operación $\cdot$ es distributiva respecto a la operación $+$, como es fácil de comprobar. ■

## 1.3. FORMA DECIMAL DE UN NÚMERO RACIONAL

Al transformar en decimal un número racional (simplemente efectuando la división entre numerador y denominador), se pueden presentar tres casos:

a) Resulta un número entero: $6/2 = 3$.

b) Resulta un decimal finito. Esto ocurre cuando el número racional (¡irreducible!) no tiene en el denominador otros divisores más que 2 y 5. Por ejemplo:

$$\frac{3}{2^2 \cdot 5^4} = \frac{3 \cdot 2^2}{2^4 \cdot 5^4} = \frac{3 \cdot 2^2}{10^4} = \frac{12}{10^4} = 0{,}0012$$
$$\frac{7}{2^3 \cdot 5^2} = \frac{7 \cdot 5}{2^3 \cdot 5^3} = \frac{35}{10^3} = 0{,}035$$

c) Resulta un decimal periódico. Por ejemplo: $9/7 = 1{,}\overline{285714}$, ya que, si se hace la división, llegará un momento en que las distintas cifras del resto se agotarán y, al repetirse, darán lugar a un decimal periódico en el cociente.

Se puede entonces decir que a un número racional le corresponde un decimal periódico, considerando los números decimales exactos como números con período igual a cero:

$$2{,}837 = 2{,}8370000000\ldots \qquad 2 = 2{,}0000000\ldots$$

A la inversa, si se tiene un número decimal periódico y se quiere escribir en forma de fracción, por ejemplo, $x = 2{,}3\overline{76}$, se multiplica $x$ por 1000 y por 10:

$$1000x = 2376{,}767676\ldots$$
$$10x = 23{,}767676\ldots$$

[4] Se dice que la terna $(A, +, \cdot)$ es un cuerpo si se verifica que: 1) El par $(A, +)$ es grupo abeliano, con elemento neutro e. 2) El par $(A - \{e\}, \cdot)$ es grupo. 3) La operación $\cdot$ es distributiva respecto a $+ : x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z,\ \forall x, y, z \in A$.
Si la operación $\cdot$ es conmutativa, el cuerpo se llama abeliano o conmutativo.

y se restan ambas igualdades:

$$990x = 2353$$

obteniendo:

$$x = \frac{2353}{990}$$

● NOTA *Un número de la forma $n.\overline{9}$ es igual al número entero $n+1$, resultado que se aprecia al hallar su fracción generatriz.*

**EJEMPLO 1.1** Sea $x = 2.\overline{9}$. Entonces, se multiplica $x$ por 10 y se resta $x$:

$$10x = 29{,}999\ldots$$
$$x = 2{,}999\ldots$$
$$9x = 27$$
$$x = \frac{27}{9} = 3$$

¿Ocurre lo mismo con $2.\overline{8}$? Evidentemente, no: $2.\overline{8} = 26/9$.

Los números decimales no periódicos son los irracionales. Dentro de ellos se distinguen dos categorías: irracionales algebraicos e irracionales trascendentes.

*Números irracionales algebraicos* son aquéllos que son solución de una ecuación algebraica, es decir, una ecuación cuyo primer miembro es un polinomio con coeficientes enteros y cuyo segundo miembro es igual a cero. De no existir dicha ecuación, el número irracional recibe el nombre de *transcendente*.

**EJEMPLO 1.2** $\sqrt{2}$ es irracional algebraico, ya que $x^2 - 2 = 0$, $x = \sqrt{2}$.

Por último, la unión de los números racionales e irracionales constituye el llamado conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales, que recubre completamente la recta numérica:

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

## 1.4. SEGMENTOS CONMENSURABLES

Se consideran dos segmentos $a$ y $b$, tales que $a > b$. Si se comparan, puede ocurrir tres cosas:

1. El segmento $a$ contiene un número entero de veces el segmento $b$.
2. El segmento $a$ contiene un número entero de veces un divisor de $b$.

En ambos casos, la relación entre $a$ y $b$ se puede expresar mediante un número racional. Se dice entonces que $a$ y $b$ son *conmensurables*.

3. No existe ningún divisor de $b$ contenido un número entero de veces en $a$. Se dice entonces que $a$ y $b$ son *inconmensurables*.

**EJEMPLO 1.3** La diagonal de un cuadrado y su lado son inconmensurables, ya que $d = \sqrt{2} \cdot l$, y $\sqrt{2}$ no es racional.

**EJEMPLO 1.4** La longitud de una circunferencia y su radio son inconmensurables, ya que $L = 2\pi r$, y $\pi$ no es racional.

## 1.5. EL MÉTODO DE INDUCCIÓN

Se considera el polinomio $P(n) = n^2 + n + 41$, debido a Euler, y sus valores numéricos para $n = 0, 1, 2, \ldots$ son:

$$P(0) = 41$$
$$P(1) = 43$$
$$P(2) = 47$$
$$P(3) = 53$$
$$P(4) = 61$$

Se ha obtenido números primos. Sustituyendo para $n = 5, 6, 7, 8, 9$ y $10$, se obtienen números primos: 71, 83, 97, 113, 131 y 151, respectivamente. ¿Se puede afirmar que el valor numérico de $P(n)$ es un número primo para todo valor natural de $n$? *No*. Para $n = 40$:

$$P(40) = 40^2 + 40 + 41 = 40(40+1) + 41 = 40 \cdot 41 + 41 = (40+1) \cdot 41 = 41^2$$

que no es un número primo. El polinomio anterior produce números primos para $n = 0, 1, 2, \ldots, 39$, pero falla para $n = 40$. Por tanto, es inadmisible y peligroso establecer una proposición general para todo valor natural de $n$, basándose en proposiciones que se han encontrado verdaderas para valores particulares de $n$.

### EL PRINCIPIO DE INDUCCIÓN MATEMÁTICA

La cuestión es la siguiente: si una proposición se cumple para determinados valores naturales, ¿cómo se podrá determinar si es cierta para todo valor natural?

Para contestar a esta pregunta se emplea la llamada *inducción completa* o método de inducción:

■ TEOREMA 1.2 *Una proposición se cumple para todo número natural si se verifica que:*

*a) Dicha proposición es cierta para* $n = 1$.
*b) Si se supone que la proposición es cierta para un valor natural cualquiera* $n = k$, *ello implica que es cierta para* $n = k + 1$ *(efecto dominó).*

● NOTA *Se ha visto, en el ejemplo anterior del polinomio de Euler, el error que se puede cometer al pasar por alto la condición b). El siguiente ejemplo muestra que tampoco se puede obviar a).*

■ TEOREMA "FALAZ" *Todo número natural es igual al número natural que le sigue.*

"DEMOSTRACIÓN". Se supone cierto para $n = k$:

$$k = k + 1 \tag{1.1}$$

y se quiere probar que:

$$k + 1 = k + 2 \tag{1.2}$$

En efecto, sumando 1 a ambos miembros de (1.1), se obtiene (1.2). Por tanto, si la proposición es cierta para $k$, también lo es para $n = k + 1$. ■

El error estuvo en considerar únicamente la condición b) del principio de inducción.

## 1.6. NUMERABILIDAD

● DEFINICIÓN 1.1 *Se dice que dos conjuntos A y B son coordinables cuando se puede establecer una aplicación biyectiva entre ellos*[5].

Se dice también que dos conjuntos coordinables tienen la misma potencia.

● DEFINICIÓN 1.2 *Un conjunto $A$ es finito si es coordinable con $\{1, 2, 3, \dots, n\} \in \mathbb{N}$ de extremo $n$, y se dice que $n$ es el número de elementos de $A$ o cardinal de $A$:* $\text{card}(A) = n$.

● DEFINICIÓN 1.3 *Un conjunto no finito se denomina infinito.*

Según las definiciones anteriores, dos conjuntos finitos son coordinables si tienen el mismo número de elementos. En conjuntos infinitos, las cosas son distintas, como se ve a continuación.

● DEFINICIÓN 1.4 *Se dice que un conjunto es numerable si es coordinable con $\mathbb{N}$ o con un subconjunto de $\mathbb{N}$.*

Por ejemplo, el conjunto $P$ de los números naturales pares es infinito y, además, numerable. En efecto, se puede establecer una aplicación biyectiva entre $\mathbb{N}$ y $P$ haciendo corresponder a cada elemento $n \in \mathbb{N}$ una imagen $2n \in P$.

El conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros es un superconjunto de $\mathbb{N}$ y, sin embargo, es numerable. Se puede ver mediante la correspondencia de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{N}$, tal que $\forall x \in \mathbb{Z}$:

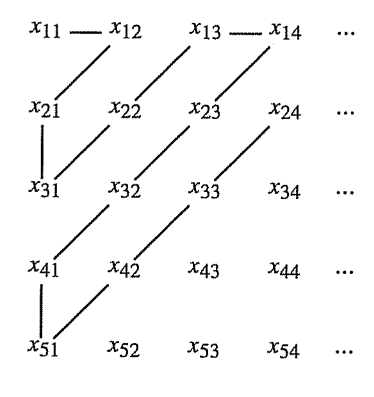
$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \geq 0 \\ -2x - 1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

■ TEOREMA 1.3 *La unión de una colección numerable de conjuntos numerables es un conjunto numerable.*

DEMOSTRACIÓN. En efecto, sean los conjuntos numerables:

$$X_1 = \{x_{11},\ x_{12}, \dots, x_{1n}, \dots\}$$
$$X_2 = \{x_{21},\ x_{22}, \dots, x_{2n}, \dots\}$$
$$X_3 = \{x_{31},\ x_{32}, \dots, x_{3n}, \dots\}$$

La unión de todos ellos $\bigcup_{i=1}^{n} X_i$ se puede numerar siguiendo el esquema:




.................................

[5] Una aplicación entre dos conjuntos $A$ y $B$ es una correspondencia que asigna a todo elemento del conjunto $A$ un solo elemento del conjunto $B$. Si en el conjunto $A$ no hay dos elementos que tengan la misma imagen, la aplicación recibe el nombre de *inyectiva*. Si todo elemento de $B$ tiene un original en $A$, la aplicación se llama *sobreyectiva*. Una aplicación inyectiva y sobreyectiva recibe el nombre de *biyectiva*.

Esto es:

$$x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{31}, x_{22}, x_{13}, x_{14}, x_{23}, x_{32}, x_{41}, x_{51}, x_{42}, \ldots \blacksquare$$

Como consecuencia de este teorema se puede ver que el conjunto $\mathbb{Q}$ es numerable. Para ello, se forman los conjuntos:

$$Y_1 = \{1/1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5 \ldots\}$$
$$Y_2 = \{2/1, 2/2, 2/3, 2/4, 2/5 \ldots\}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Cada uno de los conjuntos $Y_i$ es numerable y su unión es $\mathbb{Q}^+$.

## 1.7. PROPIEDADES ALGEBRAICAS DE $\mathbb{R}$

Dados dos números reales $x$ e $y$, su suma es un número real, que se designa $x + y$, y su producto es otro número real, que se designa $x \cdot y$, cumpliéndose las propiedades siguientes:

**Axioma 1** Existe elemento neutro $0 \in \mathbb{R}$ para la suma:

$$x + 0 = 0 + x = x, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

**Axioma 2** Existe un elemento opuesto $-x \in \mathbb{R}$ para todo $x \in R$:

$$x + (-x) = (-x) + x = 0$$

**Axioma 3** Propiedad asociativa para la suma:

$$x + (y + z) = (x + y) + z, \ \forall x, y, z \in \mathbb{R}$$

**Axioma 4** Propiedad conmutativa para la suma:

$$x + y = y + x, \ \forall x, y \in \mathbb{R}$$

**Axioma 5** Existe elemento neutro $1 \in \mathbb{R}$ para el producto:

$$x \cdot 1 = 1 \cdot x = x, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

**Axioma 6** Existe un elemento simétrico $1/x \in \mathbb{R}$ para todo $x \in \mathbb{R}, \ x \neq 0$:

$$x \cdot (1/x) = (1/x) \cdot x = 1$$

**Axioma 7** Se verifica la propiedad asociativa para el producto:

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z, \ \forall x, y, z \in \mathbb{R}$$

**Axioma 8** Se verifica la propiedad conmutativa para el producto:

$$x \cdot y = y \cdot x, \ \forall x, y \in \mathbb{R}$$

**Axioma 9** Se verifica la propiedad distributiva del producto respecto a la suma:

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z, \ \forall x, y, z \in \mathbb{R}$$

Entonces, la terna $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ constituye un cuerpo conmutativo.

A partir de los axiomas anteriores se deducen todas las leyes usuales del álgebra elemental de $\mathbb{R}$. A continuación, se van a ver algunas:

■ PROPOSICIÓN 1.6 *Probar que si dos elementos $x, y \in \mathbb{R}$ cumplen que $x + y = y$, entonces $x = 0$.*

DEMOSTRACIÓN. Se suma $-y \in \mathbb{R}$ (cuya existencia está garantizada por Ax2) a ambos miembros de la igualdad $x + y = y$:

$$(x + y) + (-y) = y + (-y) = 0$$

Por otra parte, en virtud de Ax2, Ax3 y Ax1:

$$(x + y) + (-y) = x + (y + (-y)) = x + 0 = x$$

Por tanto, $x = 0$. ■

■ PROPOSICIÓN 1.7 *Probar que si $x \cdot y \neq 0$, con $x, y \in \mathbb{R}$, entonces $x \cdot y = y \Longrightarrow x = 1$.*

DEMOSTRACIÓN. Análoga a la demostración anterior. ■

■ PROPOSICIÓN 1.8 *Demostrar que si $x + y = 0$, con $x, y \in \mathbb{R}$, entonces $y = -x$.*

DEMOSTRACIÓN. Sumando $-x \in \mathbb{R}$ (cuya existencia está garantizada por $Ax2$) a ambos miembros de la igualdad $x + y = 0$:

$$(-x) + (x + y) = (-x) + 0$$

Aplicando $Ax3$ al primer miembro y $Ax1$ al segundo miembro, se obtiene:

$$((-x) + x) + y = -x$$

Aplicando ahora $Ax2$ y $Ax1$ al primer miembro, se obtiene que $y = -x$. ■

■ PROPOSICIÓN 1.9 *Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Demostrar que la ecuación $a + x = b$ tiene la solución única $x = (-a) + b$.*

DEMOSTRACIÓN. Sustituyendo $x = (-a) + b$ en la ecuación y aplicando $Ax3$, $Ax2$ y $Ax1$:

$$a + ((-a) + b) = (a + (-a)) + b = 0 + b = b$$

Por tanto, $x = (-a) + b$ es solución de la ecuación.

Para demostrar que es única, se considera otra solución $x'$:

$$a + x' = b$$

Sumando $-a$ a ambos miembros y aplicando $Ax3$ y $Ax1$:

$$(-a) + (a + x') = (-a) + b$$
$$x' = (-a) + b$$

Por tanto, $x' = x$, y la solución es única. ■

## 1.8. EL ORDEN EN $\mathbb{R}$

Se dice que una relación $R$, entre los elementos de un conjunto $A$, es de orden si verifica los tres axiomas siguientes:

1) Es reflexiva: $\forall a \in A,\ aRa$.
2) Es antisimétrica: $\forall a, b \in A : aRb \ \wedge \ bRa \Longrightarrow a = b$.
3) Es transitiva: $\forall a, b, c \in A : aRb \ \wedge \ bRc \Longrightarrow aRc$.

Además, si para todo par de elementos $a, b \in A$ se verifica $aRb$ o $bRa$, se dice que la relación es de orden total. En caso contrario, la relación es de orden parcial.

■ PROPOSICIÓN 1.10 *La relación de inclusión $\subseteq$ entre conjuntos es de orden parcial.*

DEMOSTRACIÓN. La demostración es inmediata. ■

Pues bien, si en el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales se define la relación menor o igual $\leq$ en la forma:

$$a \leq b \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \ / \ a + x = b$$

se puede ver que es una relación de orden.

En efecto, es *reflexiva*, ya que tomando $x = 0 \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\} : a + 0 = a \Leftrightarrow a \leq a, \forall a \in \mathbb{R}$.

Es *antisimétrica*, puesto que $\forall a, b \in \mathbb{R}$:

$$a \leq b \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \ / \ a + x = b$$
$$b \leq a \Leftrightarrow \exists x' \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \ / \ b + x' = a$$

Sumando miembro a miembro: $a + b + x + x' = b + a \Longrightarrow x + x' = 0$ (por la proposición 1.6)$\Longrightarrow x = x' = 0$ (ya que $x, x' \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$) $\Longrightarrow a = b$.

Por último, es *transitiva*, ya que $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$:

$$a \leq b \Leftrightarrow \exists x_1 \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \ / \ a + x_1 = b$$
$$b \leq c \Leftrightarrow \exists x_2 \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \ / \ b + x_2 = c$$

Despejando $b$ en la segunda igualdad y sustituyendo en la primera:

$$a + x_1 = -x_2 + c \Leftrightarrow a + x_1 + x_2 = c \Leftrightarrow aRc$$

ya que $x_1 + x_2 \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.

Por otra parte, $\forall a, b \in \mathbb{R}$, siempre existe un número $x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \ / \ a + x = b$ o bien $b + x = a$. Por lo tanto, $\mathbb{R}$ está totalmente ordenado.

Así, $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ es un cuerpo totalmente ordenado.

■ PROPOSICIÓN 1.11 *Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$. Si $a \leq b$, entonces $a + c \leq b + c$.*

DEMOSTRACIÓN. En efecto, $a \leq b \Longrightarrow \exists x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}/a + x = b$. Sumando $c$ a ambos miembros: $a + c + x = b + c$, lo que implica que $a + c \leq b + c$. ■

■ PROPOSICIÓN 1.12 *Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$. Si $a \leq b$ y $c > 0$, entonces $ac \leq bc$. Si $a \leq b$ y $c < 0$, entonces $ac \geq bc$.*

DEMOSTRACIÓN. Análoga a la demostración anterior. ■

■ PROPOSICIÓN 1.13 *Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Si $a \leq b$ y $c \leq d$, entonces $a + c \leq b + d$.*

DEMOSTRACIÓN.

$$a \leq b \Leftrightarrow \exists x_1 \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \ / \ a + x_1 = b$$
$$c \leq d \Leftrightarrow \exists x_2 \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \ / \ c + x_2 = d$$

Sumando miembro a miembro: $a+c+x_1+x_2 = b+d \Leftrightarrow a+c \leq b+d$, ya que $x_1+x_2 \in \mathbb{R}^+\cup\{0\}$. ■

■ PROPOSICIÓN 1.14 (DESIGUALDAD DE BERNOUILLI) *Si $x \geq 0$, entonces $(1 + x)^n \geq 1 + nx$.*

DEMOSTRACIÓN. Por inducción. Para $n = 1$ es evidente. Se supone cierta para $n = k$ y se ha de demostrar para $n = k + 1$. Si es cierto que $(1 + x)^k \geq 1 + kx$, como $1 + x > 0$, se tiene:

$$(1 + x)^{k+1} = (1 + x)^k(1 + x) \geq (1 + kx)(1 + x)$$
$$= 1 + (k + 1)x + kx^2 \geq 1 + (k + 1)x$$

ya que $kx^2 \geq 0$. ■

## 1.9. DENSIDAD DE LOS NÚMEROS RACIONALES EN $\mathbb{R}$

Se va a probar ahora que $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$, esto es, que dados dos números reales distintos cualesquiera, siempre se podrá encontrar un número racional entre ambos.

■ TEOREMA 1.4 *Si* $x, y \in \mathbb{R}, x < y, \exists r \in \mathbb{Q} / x < r < y$.

DEMOSTRACIÓN. Sean $x = x_0.x_1x_2x_3x_4\dots$ e $y_0.y_1y_2y_3y_4\dots$, tales que $x < y$. Por próximos que se encuentren, es decir, si $x_0 = y_0$, $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2, \dots$, las cifras que ocupan un lugar determinado $n$, cumplirán: $x_n < y_n$. Entonces, el número racional $r = y_0.y_1y_2y_3\dots y_n$ (decimal finito) es el número buscado. ■

■ COROLARIO *Si* $x, y \in \mathbb{R},\ x < y,\ \exists i \in \mathbb{I} / x < i < y$.

DEMOSTRACIÓN. Aplicando el teorema anterior a $x/\sqrt{2}$ e $y/\sqrt{2}$, se obtiene un número racional $r \neq 0$ tal que:

$$x/\sqrt{2} < r < y/\sqrt{2}$$

y, entonces, $i = r\sqrt{2},\ x < i < y$, es el número buscado. ■

## 1.10. VALOR ABSOLUTO DE UN NÚMERO REAL

Si $x$ es un número real, se define su *valor absoluto* $|x|$ como:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$ Igual $\sqrt{x^2}$

**EJEMPLO 1.5** $|3| = 3;\ |-3| = -(-3) = 3$.

■ PROPOSICIÓN 1.15 $|-x| = |x|,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

DEMOSTRACIÓN. Si $x = 0$, es evidente. Si $x > 0$, entonces $-x < 0 \Longrightarrow |-x| = -(-x) = x = |x|$. Si $x < 0:\ |x| = -x = |-x|$, ya que $-x > 0$. ■

■ PROPOSICIÓN 1.16 $|x - y| = |y - x|,\ \forall x, y \in \mathbb{R}$.

DEMOSTRACIÓN. Inmediata, por la proposición anterior. ■

■ PROPOSICIÓN 1.17 $|xy| = |x||y|,\ \forall x, y \in \mathbb{R}$.

DEMOSTRACIÓN. Si $x$ o $y$ son cero, la proposición es evidente. Si $x > 0$ e $y > 0$, entonces $xy > 0$, con lo que $|xy| = xy = |x||y|$. Si $|x| > 0$ e $|y| < 0$, entonces $xy < 0$, con lo que $|xy| = -xy = x(-y) = |x||y|$. Análogamente, si $x < 0$ e $y > 0$. Por último, si $x < 0$ e $y < 0$, entonces $xy > 0$: $|xy| = xy = (-x)(-y) = |-x||-y| = |x||y|$. ■

■ PROPOSICIÓN 1.18 $|x| \geq a \Longrightarrow x \geq a$ *o* $x \leq -a$, *con* $x, a \in \mathbb{R}$.

DEMOSTRACIÓN. Si $x > 0$, $|x| = x \geq a$. Si $x < 0$, $|x| = -x \geq a \Longrightarrow x \leq -a$. ■

■ PROPOSICIÓN 1.19 $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$, *con* $x, a \in \mathbb{R}$.

DEMOSTRACIÓN. Si $|x| \leq a$, entonces $x \leq a$ y $-x \leq a$. De la segunda desigualdad se tiene $-a \leq x$. De aquí, $-a \leq x \leq a$.

Recíprocamente, si $-a \leq x \leq a$, se tiene que $-x \leq a$ y $x \leq a$, de manera que $|x| \leq a$. ■

■ PROPOSICIÓN 1.20 $-|x| \leq x \leq |x|, \forall x \in \mathbb{R}$.

DEMOSTRACIÓN. Inmediata, tomando $a = |x|$ en la proposición anterior. ■

■ PROPOSICIÓN 1.21 (DESIGUALDAD TRIANGULAR) $|x+y| \leq |x| + |y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$.

DEMOSTRACIÓN. De la proposición anterior, $-|x| \leq x \leq |x|$, $-|y| \leq y \leq |y|$. Sumando miembro a miembro:

$$-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|$$

por la proposición 1.20.

Aplicando que $-a \leq x \leq a \Longrightarrow |x| \leq a$, probado anteriormente, se tiene:

$$|x+y| \leq |x| + |y| \; ■$$

■ PROPOSICIÓN 1.22 $|x-y| \leq |x| + |y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$.

DEMOSTRACIÓN. Es consecuencia de la desigualdad triangular, sustituyendo $y$ por $-y$:

$$|x-y| \leq |x| + |-y|$$

Según una proposición anterior, $|-y| = |y|$, con lo que:

$$|x-y| \leq |x| + |y| \; ■$$

■ PROPOSICIÓN 1.23 $|x_1 + x_2 + \cdots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|, \forall x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$.

DEMOSTRACIÓN. Por inducción. Para $n = 1$ es evidente: $|x_1| = |x_1|$. Si $|x_1 + x_2 + \cdots + x_k| \leq |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_k|$, entonces:

$$\begin{aligned} |(x_1 + x_2 + \cdots + x_k) + x_{k+1}| &\leq |x_1 + x_2 + \cdots + x_k| + |x_{k+1}| \\ &\leq |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_k| + |x_{k+1}| \; ■ \end{aligned}$$

## 1.11. INTERVALOS DE $\mathbb{R}$

● DEFINICIÓN 1.5 *Se llama intervalo abierto de extremos a y b, y se representa* $(a, b)$ *al conjunto:*

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, a < x < b\}$$

● DEFINICIÓN 1.6 *Se llama intervalo cerrado de extremos a y b, y se representa* $[a, b]$ *al conjunto:*

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \,/\, a \leq x \leq b\}$$

Se da ahora, sin demostración, un importante teorema:

■ TEOREMA 1.5 *El intervalo* $(0, 1) \subset \mathbb{R}$ *no es numerable.*

Al conjunto (0,1) se le llama *el continuo* y a la potencia de (0,1) se le llama *potencia del continuo*.

Por lo tanto, $\mathbb{R}$ no es numerable y tampoco lo es $\mathbb{I} = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, ya que $\mathbb{Q}$ sí lo es. Por otra parte, es fácil ver que los números irracionales algebraicos constituyen un conjunto numerable, dado que son solución de ecuaciones con coeficientes enteros y $\mathbb{Z}$ es numerable, como se ha visto (Sección 1.6).

## 1.12. POSTULADO DE CANTOR

Un postulado es un enunciado que se admite como cierto sin demostración. He aquí el de Cantor: Una sucesión $[a_n, b_n]$ de intervalos, tales que $a_n \leq a_{n+1}, b_n \geq b_{n+1}$ y:

$$\lim_{n \to \infty} (b_n - a_n) = 0$$

define un único número real $r$, común a todos ellos.

## 1.13. COTAS

● DEFINICIÓN 1.7 *El número real $a$ es cota superior del conjunto $A \subset \mathbb{R}$, si se verifica $x \leq a$, $\forall x \in A$. Si un conjunto posee cota superior, se dice que está acotado superiormente. Análogamente se define cota inferior y acotado inferiormente.*

● DEFINICIÓN 1.8 *Si el conjunto $A$ está acotado superior e inferiormente, se dice que está acotado.*

● DEFINICIÓN 1.9 *A la menor de las cotas superiores se le llama* supremo. *A la mayor de las cotas inferiores,* ínfimo. *Si el supremo pertenece al conjunto, se le llama elemento máximo. Si el ínfimo pertenece al conjunto, se le llama* elemento mínimo.

**EJEMPLO 1.6** Sea el intervalo $A = (3, 8]$. Son cotas superiores: 8, 9, 10, 100,.... Son cotas inferiores -5, 1, 2, 3,.... El conjunto $A$ está acotado superior e inferiormente. Por tanto, está acotado. El ínfimo es 3. El supremo es 8. Como $8 \in A$, recibe el nombre de máximo.

## 1.14. COMPLETITUD DE $\mathbb{R}$

Se ha visto que $\sqrt{2}$ no pertenece a $\mathbb{Q}$. Por tanto, los números racionales no recubren por completo la recta numérica. Es verdad que se pueden dar sucesiones de aproximaciones a $\sqrt{2}$, como 1, 1,4, 1,41, 1,414, 1,4142, ..., pero el conjunto $P = \{x \in \mathbb{Q}/x < \sqrt{2}\}$ no posee supremo en $\mathbb{Q}$. Se dice que $\mathbb{Q}$ es un cuerpo *incompleto*.

Sin embargo, el conjunto de las cotas superiores de $P$ admite un mínimo en $\mathbb{R}$, que es precisamente $\sqrt{2}$. Se dice que $\mathbb{R}$ es un cuerpo *completo*. En general, un cuerpo ordenado $K$ es completo si cualquier subconjunto acotado superiormente (inferiormente), $P$ de $K$, admite supremo (ínfimo) en $K$.

Por tanto, $(\mathbb{R}, +, . , \leq)$ es un cuerpo totalmente ordenado y completo.

## 1.15. PROPIEDAD ARQUIMEDIANA DE $\mathbb{R}$

Arquímedes consideró esta propiedad como uno de los axiomas de la Geometría, aunque en las geometrías no arquimedianas se prescinde de ella. Viene a decir lo siguiente:

Un segmento de $\mathbb{R}$, de longitud arbitraria $p$, puede ser recubierto por un número finito de segmentos de longitud igual a $x$, con $x$ tan pequeño como se quiera.

■ TEOREMA 1.6 *El conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales no está acotado superiormente.*

DEMOSTRACIÓN. Por reducción al absurdo. Se supone que $\mathbb{N}$ está acotado y que $b$ es el supremo. Entonces, $b - 1$ no es una cota superior por ser menor que $b$. Existirá un mínimo número natural $n$, tal que $n > b - 1$. De aquí, $n + 1 > b$. Y como $n + 1 \in \mathbb{N}$, $b$ no es una cota superior; he aquí la contradicción. ■

■ COROLARIO *Dado un número real $x$, existe un número natural $n$, tal que $n > x$.*

DEMOSTRACIÓN. De no ser cierto, $x$ sería una cota superior de $\mathbb{N}$, en contradicción con el teorema anterior. ■

■ COROLARIO *Si $x > 0$ y $p \in \mathbb{R}$, existe $n \in \mathbb{N}$, tal que $nx > p$.*

DEMOSTRACIÓN. Inmediata, cambiando $x$ por $p/x$ en el corolario anterior. ■

## 1.16. ENTORNO DE UN PUNTO

● DEFINICIÓN 1.10 *Se llama entorno del punto $x$ a todo subconjunto que contiene un intervalo abierto $(a, b)$ que contiene a $x$.*

En la práctica, se suelen considerar entornos de la forma $(x - \epsilon, x + \epsilon)$, de centro el punto $x$ y radio $\epsilon > 0$.

● DEFINICIÓN 1.11 *Se llama entorno reducido de un punto $x$ a todo entorno de $x$ del que se ha excluido el propio $x$.*

## 1.17. PUNTOS INTERIORES, DE ACUMULACIÓN, AISLADOS, ADHERENTES Y FRONTERA

● DEFINICIÓN 1.12 *Un punto $x \in A$ es interior al conjunto $A$ si existe un entorno de $x$ contenido en $A$.*

*El conjunto de los puntos interiores de $A$ se designa por $\mathring{A}$. Evidentemente, $\mathring{A} \subseteq A$.*

● DEFINICIÓN 1.13 *Se dice que $x \in A$ es un punto aislado de $A$ si existe un entorno de $x$ que no contiene más puntos de $A$ que el propio $x$.*

*El conjunto de los puntos aislados de $A$ se representa* $\text{Iso}(A)$.

● DEFINICIÓN 1.14 *Un punto $x$ es de acumulación de $A$ si todo entorno de $x$ contiene puntos de $A$ distintos de $x$. Dicho de otro modo, un punto de $A$ es de acumulación si no es aislado.*

*El conjunto de los puntos de acumulación se representa $A'$ y recibe el nombre de* conjunto derivado de $A$.

*Evidentemente, $\mathring{A} \subseteq A'$.*

● DEFINICIÓN 1.15 *Un punto $x$ es adherente a $A$ si para todo entorno $E$ de $x$ se verifica que $E \cap A \neq \emptyset$.*

*El conjunto de los puntos adherentes recibe el nombre de* adherencia *o* clausura, *y se representa $\overline{A}$. Evidentemente, $A \subseteq \overline{A}$.*

● DEFINICIÓN 1.16 *Se dice que un punto $x$ es frontera de $A$ si todo entorno de $x$ contiene puntos de $A$ y de su complementario $A^c$:*

$$E \cap A \neq \emptyset \qquad E \cap A^c \neq \emptyset$$

*El conjunto de los puntos frontera se representa $F(A)$. El conjunto de los puntos frontera que pertenecen a $A$ recibe el nombre de* frontera interna de $A$ *y se representa $F_i(A)$. El conjunto de los puntos frontera que no están en $A$ recibe el nombre de* frontera externa de $A$, *y se representa $F_e(A)$.*

## 1.18. CONJUNTOS ABIERTOS Y CERRADOS

● DEFINICIÓN 1.17 *Se dice que el conjunto $A \subset \mathbb{R}$ es abierto si todos sus puntos son interiores, esto es, si para todo $x$ de $A$ existe un entorno de $x$ contenido en $A$. Dicho de otro modo, $A$ es abierto si $A = \mathring{A}$.*

De acuerdo con esta definición, todos los intervalos abiertos de $\mathbb{R}$ son conjuntos abiertos.

● DEFINICIÓN 1.18 *Se dice que el conjunto $A \subset \mathbb{R}$ es cerrado si contiene todos sus puntos de acumulación. Dicho de otro modo, $A$ es cerrado si $A = \overline{A}$.*

De acuerdo con esta definición, todos los intervalos cerrados de $\mathbb{R}$ son conjuntos cerrados.

Se da ahora, sin demostración, una interesante proposición que permitirá estudiar los conjuntos cerrados de $\mathbb{R}$ como complementarios de los abiertos:

■ PROPOSICIÓN 1.24 *El complementario de un conjunto cerrado es abierto y viceversa.*

■ PROPOSICIÓN 1.25 *$\mathbb{R}$ y $\emptyset$ son abiertos y cerrados.*

DEMOSTRACIÓN. Es evidente que $\mathbb{R}$ es abierto, ya que todos sus puntos son interiores. Del mismo modo, es cerrado, ya que contiene a todos sus puntos de acumulación. $\emptyset$ es abierto y cerrado por la proposición anterior. ■

Se ha de hacer notar que los términos *abierto* y *cerrado* no son antónimos al referirse a subconjuntos de $\mathbb{R}$. Afortunadamente, $\mathbb{R}$ y $\emptyset$ son los únicos subconjuntos de $\mathbb{R}$ abiertos y cerrados a la vez.



# PROBLEMAS RESUELTOS

**1.1.** Demostrar que $\sqrt[3]{5}$ es algebraico.

**Resolución**

$x^3 - 5 = 0; \quad x^3 = 5; \quad x = \sqrt[3]{5}$

**1.2.** Calcular $\sqrt{2,\overline{7}}$.

**Resolución**

Sea $x = 2,\overline{7} = 2,777\ldots$ Se multiplica por 10: $10x = 27,777\ldots$ Se resta $x = 2,777\ldots$, y resulta:

$$9x = 25 \Longrightarrow x = \frac{25}{9} \Longrightarrow \sqrt{2,\overline{7}} = \frac{5}{3}$$

**1.3.** Escribir dos decimales periódicos y dos decimales finitos comprendidos entre 1,33333 y 1,33334.

**Resolución**

Periódicos: $1,33333\overline{2}$ y $1,\overline{3}$. Exactos: 1,333334 y 1,333337

**1.4.** Demostrar que si $a^2$ es un número par, también lo es $a$, $a \in \mathbb{N}$.

**Resolución**

Por reducción al absurdo. Si $a$ no es par, existe $n \in \mathbb{N} \;/\; a = 2n + 1$. Elevando al cuadrado: $a^2 = 4n^2 + 4n + 1$, que es impar, en contra de la hipótesis.

**1.5.** Demostrar que la suma de dos números irracionales, de la forma $\sqrt{a}$ y $\sqrt{b}$, es irracional.

**Resolución**

Por reducción al absurdo. Si $\sqrt{a} + \sqrt{b} \in \mathbb{Q}$: $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \frac{m}{n}$, $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$. Despejando $a$: $a = \frac{m^2}{n^2} + b - 2 \cdot \frac{m}{n} \cdot \sqrt{b} \Longrightarrow \sqrt{b} = \frac{n}{2m} \cdot (b - a) + \frac{m}{2n}$, se llega a un absurdo. El segundo miembro (racional) es igual a $\sqrt{b}$ (irracional).

**1.6.** Demostrar que la suma, producto y cociente de dos números irracionales no es necesariamente irracional.

**Resolución**

$(4 + \sqrt{3}) + (2 - \sqrt{3}) = 6; \quad \sqrt{8} \cdot \sqrt{2} = 4; \quad \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = 2$

**1.7.** Se ha visto que siempre es posible encontrar un número racional entre dos números racionales dados. Probar que siempre es posible encontrar un número irracional entre dos números racionales $x$ e $y$, $(x < y)$.

**Resolución**

$a = x + \frac{y - x}{b}$, siendo $b$ un número irracional cualquiera mayor que 1, por ejemplo, $\pi$, $e$, $\sqrt{2}, \ldots$

**1.8.** Demostrar que entre dos números irracionales de la forma $\sqrt{a}$ y $\sqrt{b}$ siempre es posible encontrar otro número irracional.

**Resolución**

$c = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2}$ está entre $\sqrt{a}$ y $\sqrt{b}$, y es irracional, como se demostró en un ejercicio anterior.

**1.9.** Demostrar que la suma $r + i$ de un número racional $r$ y un número irracional $i$ es irracional.

**Resolución**

Si $r + i = s \in \mathbb{Q}$, entonces $i = s - r \in \mathbb{Q}$. Absurdo, por tanto, $r + i$ es irracional.

**1.10.** Dos puntos móviles parten en el mismo instante, con igual velocidad constante, de un vértice de un hexágono de lado $l$. Uno recorre el contorno del hexágono y el otro la diagonal $d$, que une dos vértices opuestos. ¿Volverán los móviles a encontrarse? Resolver el problema si en lugar de un hexágono fuese un cuadrado.

**Resolución**

Sí, puesto que $d$ y $l$ son conmensurables: $d = 2 \cdot l$. Se encontrarán cuando el primer punto haya completado dos vueltas al contorno del hexágono.

Si fuese un cuadrado de diagonal $d$, tendrían que existir dos números naturales $m$ y $n$ tales que $m \cdot d = n \cdot l$, para que los dos puntos se encontraran de nuevo. Esto no es posible, ya que $d = l \cdot \sqrt{2}$ y ello implica que $m \cdot \sqrt{2} = n$, lo cual es absurdo.

**1.11.** Demostrar por inducción la fórmula:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \; n \in \mathbb{N}$$

**Resolución**

Es cierta para n=1:

$$1^2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6}$$

Suponiendo que es cierta para $n = k$:

$$1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

se ha de demostrar que es cierta para $n = k + 1$. En efecto:

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \\ &= \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6} \\ &= \frac{k+1}{6}\,[k(2k+1) + 6(k+1)] \\ &= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} \end{aligned}$$

**1.12.** Demostrar por inducción la fórmula:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2, \; n \in \mathbb{N}$$

**Resolución**

Es cierta para $n = 1$: $1^3 = 1^2$. Suponiendo que es cierta para $n = k$:

$$1^3 + 2^3 + \cdots + k^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + k)^2$$

se ha de demostrar para $n = k + 1$, esto es:

$$1^3 + 2^3 + \cdots + k^3 + (k+1)^3 = (1 + 2 + \cdots + k + k + 1)^2$$

Por la hipótesis de inducción:

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + \cdots + k^3 + (k+1)^3 &= (1 + 2 + 3 + \cdots + k)^2 + (k+1)^3 \\ &= \left(\frac{1+k}{2} \cdot k\right)^2 + (k+1)^3 \\ &= (k+1)^2 \left(\frac{k^2}{4} + k + 1\right) \\ &= (k+1)^2 \, \frac{k^2 + 4k + 4}{4} \\ &= \frac{(k+1)^2 \cdot (k+2)^2}{4} \end{aligned}$$

Por otra parte:

$$(1+2+\cdots+k+k+1)^2=\left[\frac{1+k+1}{2}\cdot(k+1)\right]^2$$

Por último:

$$\left(\frac{1+k}{2}\cdot k\right)^2+(k+1)^3=\left[\frac{1+k+1}{2}\cdot(k+1)\right]^2=\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$$

**1.13.** Resolver las inecuaciones:

a) $|x-3|<8$;  b) $|x+5|\geq 4$

**Resolución**

a)

$$-8<x-3<8\Longrightarrow\left.\begin{array}{c}-5<x\\ \text{y}\\ x<11\end{array}\right\}\Longrightarrow x\in(-5,11)$$

b)

$$\left.\begin{array}{c}x+5\geq 4\\ \text{o}\\ x+5\leq -4\end{array}\right\}\Longrightarrow\left.\begin{array}{c}x\geq -1\\ \text{o}\\ x\leq -9\end{array}\right\}\Longrightarrow x\in(-\infty,-9]\cup[-1,\infty)$$

**1.14.** Resolver la inecuación $1-\dfrac{x}{2}>\dfrac{1}{1+x}$

**Resolución**

Si $1+x>0\Longrightarrow x>-1$. Entonces $(1-x/2)(1+x)>1$ ya que, por ser $1+x>0$, resulta una desigualdad del mismo sentido. Resolviendo:

$$x^2-x<0\Longrightarrow x(x-1)<0\Longrightarrow\left.\begin{array}{c}x>0\\ \text{y}\\ x-1<0\end{array}\right\}\Longrightarrow x\in(0,1)$$

Si $x<0$ y $x-1>0$, no hay solución.

Por otra parte, si $1+x<0\Longrightarrow x<-1$. Entonces, se verifica la desigualdad $(1-x/2)(1+x)<1$, ya que, por ser $1+x<0$, resulta una desigualdad de sentido contrario. Resolviendo:

$$x^2-x>0\Longrightarrow x(x-1)>0\Longrightarrow\left.\begin{array}{c}x>0\\ \text{y}\\ x-1>0\end{array}\right\}\Longrightarrow x\in(1,\infty)$$

Si $x<0$ y $x-1<0\Longrightarrow x\in(-\infty,0)$.

Por tanto, $x\in(-\infty,0)\cup(1,\infty)$. Teniendo en cuenta que $x<-1$, resulta $x\in(-\infty,-1)$.

Por último, la solución será: $x\in(-\infty,-1)\cup(0,1)$.

**1.15.** Demostrar que todo intervalo $(a,b)$ de $\mathbb{R}$ tiene la potencia del continuo.

**Resolución**

Al intervalo $(0,1)\subset\mathbb{R}$ se le llama *el continuo* (Sección 1.11). El intervalo $(a,b)\subset\mathbb{R}$ tiene la potencia de $(0,1)\subset\mathbb{R}$, ya que es posible establecer una aplicación biyectiva entre ambos (Sección 1.6):

$$f:(0,1)\to(a,b)$$
$$x\mapsto a+(b-a)x$$

La aplicación es inyectiva, dados dos elementos cualesquiera $x_1, x_2 \in (0, 1)$, si $y_1 = y_2$:

$$a + (b - a)x_1 = a + (b - a)x_2 \Longrightarrow x_1 = x_2$$

Es sobreyectiva, ya que para todo $y \in (a, b)\ \exists\, x = \dfrac{y - a}{b - a} \in (0, 1)$.

Por tanto, $(a, b)$ es coordinable con $(0, 1)$ y tiene la misma potencia.

**1.16.** Sea el conjunto $A = \{1,\ 1/2,\ 1/3,\ 1/4,\ \dots\}$. Encontrar tres cotas superiores y tres cotas inferiores del conjunto $A$. ¿Tiene supremo?, ¿y máximo?, ¿tiene ínfimo?, ¿y mínimo?

**Resolución**

Cotas inferiores: $-3, 0, -1$; cotas superiores: $1, 2, 2{,}5$. Por lo tanto, está acotado.

El supremo es 1, y como $1 \in A$, recibe el nombre de máximo. El ínfimo es 0 y como 0 no pertenece a $A$, el conjunto carece de mínimo.

**1.17.** Determinar los puntos de acumulación del conjunto:

$$\left\{(-1)^n + \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}\right\}$$

¿Pertenecen al conjunto dado?

**Resolución**

Dando valores a $n$, se obtiene:

$$0, \frac{3}{2}, \frac{-2}{3}, \frac{5}{4}, \frac{-4}{5}, \frac{7}{6}, \dots$$

Los puntos de acumulación son $-1$ y $1$, que no pertenecen al conjunto dado.

**1.18.** Hallar interior, conjunto derivado, adherencia, puntos aislados y frontera del conjunto:

$$A = (1, 2] \cup \left\{\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{3\}$$

**Resolución**

$$\mathrm{Int}(A) = (1, 2) \qquad A' = \{0\} \cup [1, 2]$$

$$\overline{A} = A \cup \{0\} \qquad \mathrm{Iso}(A) = \left\{\frac{1}{n+1},\ n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{3\}$$

$$F_i(A) = \left\{\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{2\} \cup \{3\} \qquad F_e(A) = \{0\}$$

**1.19.** Hallar interior, conjunto derivado, adherencia, puntos aislados y frontera del conjunto $\mathbb{Q}$.

**Resolución**

$$\mathrm{Int}(\mathbb{Q}) = \emptyset \qquad \mathrm{Iso}(\mathbb{Q}) = \emptyset$$

$$\mathbb{Q}' = \mathbb{R} \qquad \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$$

$$F_i(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q} \qquad F_e(\mathbb{Q}) = \mathbb{I}$$

**1.20.** Hallar interior, conjunto derivado, adherencia, puntos aislados y frontera del conjunto:

$$A = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$$

¿Tiene máximo y mínimo?, ¿es abierto?, ¿es cerrado?

**Resolución**

$$\text{Int}(A) = \emptyset \qquad \text{Iso}(A) = \emptyset$$
$$A' = [0, 1] \qquad \overline{A} = [0, 1]$$
$$F_i(A) = A \qquad F_e(A) = [0, 1] \cap \mathbb{I}$$
$$\text{máximo} = 1 \qquad \text{mínimo} = 0$$

No es abierto ni cerrado, ya que $A \neq \text{Int}(A)$ y $A \neq \overline{A}$.

# PROBLEMAS PROPUESTOS

**1.21.** Resolver la ecuación $1.2\overline{3}\, x + 5 = 2{,}\overline{1}$.

**1.22.** Representar $\sqrt{7}$ en la recta real.

**1.23.** Demostrar que el producto $r \cdot i$, de un número racional $r$ por un número irracional $i$, es irracional.

**1.24.** Dado un número irracional $i > 0$, encontrar otro número irracional entre 0 e $i$.

**1.25.** Demostrar que $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ es irracional.

**1.26.** Si $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$, $x \in \mathbb{I}$, demostrar que, en general, $\dfrac{ax + b}{cx + d} \in \mathbb{I}$.

**1.27.** Demostrar que si $x, y \in \mathbb{R}$, con $x \neq 0$, son tales que $x \cdot y = 1$, entonces $y = \dfrac{1}{x}$.

**1.28.** Racionalizar $\dfrac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}}$.

**1.29.** Dos puntos móviles, con igual velocidad constante, parten del vértice A de un triángulo equilátero ABC de altura AH, relativa al lado BC. Uno recorre el contorno del triángulo ABC y el otro recorre el contorno del triángulo ABH, ambos en sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj. ¿Volverán los móviles a encontrarse?

**1.30.** Demostrar por inducción la fórmula:

$$(a + b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} \cdot b^i, \ n \in \mathbb{N}$$

**1.31.** Demostrar por inducción la fórmula:

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 > \frac{n^4}{4}, \ n \in \mathbb{N}$$

**1.32.** Resolver la inecuación $3x^3 - 21x + 18 > 0$.

**1.33.** Resolver las inecuaciones:

a) $|3 - x^{-1}| < 1$; b) $|x + 4| \geq 7$

**1.34.** Resolver las inecuaciones:

a) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{1-x} > 0$; b) $\dfrac{x-1}{x+1} > 0$

**1.35.** Resolver la inecuación $x^2 + x + 1 > 0$.

**1.36.** Determinar si son ciertas o falsas cada una de las igualdades:

a) $\displaystyle\sum_{i=0}^{100} i^2 = \sum_{i=1}^{100} i^2$.

b) $\displaystyle\sum_{i=0}^{100} 3 = 300$.

c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{100} (i+1)^2 = \sum_{i=0}^{100} i^2$.

d) $\displaystyle\sum_{i=1}^{100} (i-1)^2 = \sum_{i=0}^{99} i^2$.

**1.37.** Dado el conjunto $\mathbb{N}$, hallar: a) interior; b) puntos aislados; c) conjunto derivado; d) adherencia; e) frontera interna y frontera externa.

**1.38.** Hallar lo mismo para el conjunto $\mathbb{I}$ de los números irracionales.

**1.39.** Hallar lo mismo para el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales.

En los siguientes problemas, determinar el supremo e ínfimo de los siguientes conjuntos, indicando cuáles de ellos coinciden con el máximo o mínimo:

**1.40.** $A = (1, 2]$.

**1.41.** $B = \{x \in \mathbb{Q} \,/\, 0 < x < 1\}$.

**1.42.** $C = \left\{\dfrac{n+1}{n+2},\ n \in \mathbb{N}\right\}$.

**1.43.** $D = \left\{\dfrac{1}{n^2},\ n \in \mathbb{N}\right\}$.

**1.44.** $E = \{x \in \mathbb{R}/x^2 - 5x + 6 < 0\}$.

**1.45.** $F = (0, \infty)$.

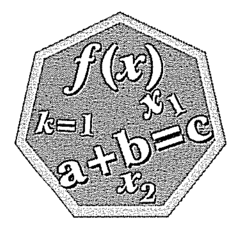
**1.46.** $G = \{3^{-a} + 5^{-b};\ a, b \in \mathbb{N}\}$.

**1.47.** $H = \{x \in \mathbb{R} \,/\, (x-a)(x-b)(x-c)(x-d) < 0,\ a < b < c < d\}$.

**1.48.** Se consideran los conjuntos $A = [1, 3)$ y $B = (2, 4]$. Hallar interior, adherencia, frontera y acotación de los conjuntos: a) $A \cup B$; b) $A \cap B$.

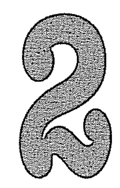
**1.49.** Hallar interior, conjunto derivado, adherencia, puntos aislados y frontera del conjunto:

$$A = (2, 3] \cup \left\{ \frac{n+1}{n},\ n \in \mathbb{N} \right\}$$




CAPÍTULO

# EL NÚMERO COMPLEJO




Una ecuación de la forma $x^2 + 4 = 0$ no tiene solución en el cuerpo $\mathbb{R}$ de los números reales. Para resolver ecuaciones de este tipo se introduce el concepto de unidad imaginaria y se construye, a partir de él, un superconjunto $\mathbb{C}$ de $\mathbb{R}$, llamado *conjunto de los números complejos*, en el que la anterior ecuación sí tendría solución.

## 2.1. LA UNIDAD IMAGINARIA

● DEFINICIÓN 2.1 *Se define la unidad imaginaria i como* $i = \sqrt{-1}$.

Se puede resolver ahora la ecuación $x^2 + 4 = 0$:

$$x = \sqrt{-4} = \sqrt{4 \cdot (-1)} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{-1} = \pm 2i$$

**EJEMPLO 2.1** Calcular $\sqrt{-16}$.
Puesto que $i = \sqrt{-1}$, entonces $\sqrt{-16} = \sqrt{16(-1)} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{-1} = \pm 4i$.

**EJEMPLO 2.2** Resolver la ecuación $x^2 + 2x + 2 = 0$.
$x = -1 \pm i$.

A continuación, se va a hallar las potencias sucesivas de $i$:

$$\begin{aligned} i^2 &= (\sqrt{-1})^2 = -1 \\ i^3 &= i^2 \cdot i = (-1) \cdot i = -i \\ i^4 &= i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1 \end{aligned}$$

Puesto que $i^4 = 1$, se tiene que $i^5 = i^4 \cdot i = i$, $i^6 = i^4 \cdot i^2 = i^2 = -1$ repitiéndose los valores de las potencias.

**EJEMPLO 2.3** Calcular $i^{274}$.

$$i^{274} = i^{4 \cdot 68 + 2} = i^{4 \cdot 68} \cdot i^2 = (i^4)^{68} \cdot (-1) = -1.$$

## 2.2. EL NÚMERO COMPLEJO

● DEFINICIÓN 2.2 *Se llama número complejo a la expresión* $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$, *donde* $a$ *es la llamada parte real y* $b$ *la parte imaginaria del número complejo. Es decir, un número complejo no es otra cosa que un par ordenado de números reales* $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Si $b = 0$, se tiene un número real. Así, se pueden considerar los números reales como un subconjunto de los numeros complejos.

● DEFINICIÓN 2.3 *Si* $a = 0$, *el número complejo* $0 + bi = bi$ *recibe el nombre de imaginario puro.*

● DEFINICIÓN 2.4 *Se llama conjugado del número complejo* $z = a + bi$ *al complejo* $\overline{z} = a - bi$.

● DEFINICIÓN 2.5 *Dos números complejos* $z_1 = a + bi$ *y* $z_2 = c + di$ *son iguales si, y sólo si,* $a = c$ *y* $b = d$.

## 2.3. OPERACIONES CON NÚMEROS COMPLEJOS

● DEFINICIÓN 2.6 *Sean los números complejos* $z_1 = a+bi$ *y* $z_2 = c+di$. *Entonces, se definen* $z_1+z_2$ *y* $z_1 \cdot z_2$ *en la forma:*

$$z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$
$$z_1 \cdot z_2 = (a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

De esta manera, dados tres complejos cualesquiera $z_1$, $z_2$ y $z_3$, pertenecientes al conjunto $\mathbb{C}$ de los números complejos, se puede probar:

1. $z_1 + z_2 \in \mathbb{C}$.
2. $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$.
3. $\exists\ 0 \in \mathbb{C} \,/\, z_1 + 0 = 0 + z_1 = z_1$.
4. $\exists\ (-z_1) \in \mathbb{C} \,/\, z_1 + (-z_1) = (-z_1) + z_1 = 0$.
5. $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$.

Por cumplir estas cinco propiedades, el par $(\mathbb{C}\,, +)$ tiene estructura de grupo abeliano (Sección 1.1).

Además, se verifican:

6. $z_1 \cdot z_2 \in \mathbb{C}$.
7. $z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3$.
8. $\exists\, 1 \in \mathbb{C} \,/\, z \cdot 1 = 1 \cdot z = z, \forall z \in \mathbb{C}$.
9. $\forall\, z \in \mathbb{C}\ (z \neq 0),\ \exists\, z^{-1} \in \mathbb{C} \,/\, z \cdot z^{-1} = z^{-1} \cdot z = 1$.
10. $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$.

Y por cumplir las propiedades de 6 a 10, el par $(\mathbb{C} - \{0\}, \cdot)$ tiene estructura de grupo abeliano.

Por último, se tiene:

11. $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$.

Por tanto, la terna $(\mathbb{C}\,, +, \cdot)$ tiene estructura de *cuerpo conmutativo* (Sección 1.2).

● DEFINICIÓN 2.7 *Se define el producto de un número real* $r$ *por un número complejo* $z = a + bi$ *en la forma:*

$$r \cdot z = r \cdot (a + bi) = r \cdot a + r \cdot bi$$

Se cumplen para cualesquiera $r, r' \in \mathbb{R}$ y $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ las propiedades:

12. $r \cdot (z_1 + z_2) = r \cdot z_1 + r \cdot z_2$.
13. $(r + r') \cdot z_1 = r \cdot z_1 + r' \cdot z_1$.

14. $r \cdot (r' \cdot z_1) = (r \cdot r') \cdot z_1$.
15. $1 \cdot z_1 = z_1$, con $1 \in \mathbb{R}$.

Las propiedades 1 a 5 determinan que el par $(\mathbb{C}, +)$ tiene estructura de grupo conmutativo para la suma y, conjuntamente con estas cuatro últimas propiedades, determinan que el conjunto $\mathbb{C}$ tenga estructura de *espacio vectorial* sobre el cuerpo $\mathbb{R}$.

**EJEMPLO 2.4** Dados los números complejos $z_1 = 1 + i$ y $z_2 = 2 + 3i$, hallar:
a) $z_1 + z_2$; b) $z_1 - z_2$; c) $z_1 \cdot z_2$; d) $z_1/z_2$.

$$z_1 + z_2 = (1+2) + (1+3)i = 3 + 4i$$
$$z_1 - z_2 = (1-2) + (1-3)i = -1 - 2i$$
$$z_1 \cdot z_2 = (1+i) \cdot (2+3i) = 2 + 3i + 2i + 3i^2 = -1 + 5i$$
$$z_1/z_2 = \frac{1+i}{2+3i} = \frac{(1+i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)} = 5/13 - (1/13)i$$

## 2.4. REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE UN COMPLEJO

Dado que un número complejo $z = a + bi = (a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ es un par ordenado de números reales, se puede representar dicho número complejo $z$ mediante el punto $(a, b)$ en el plano $XY$, llamado *plano complejo*. El punto $(a, b)$ recibe el nombre de *afijo* del número complejo $z$ (ver Figura 2.1).

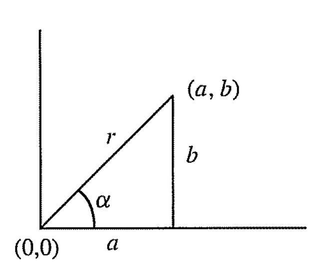



**Figura 2.1**

## 2.5. MÓDULO Y ARGUMENTO DE UN COMPLEJO

● DEFINICIÓN 2.8 *Se define el módulo o valor absoluto de un número complejo* $z = a + bi$ *como* $r = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

● DEFINICIÓN 2.9 *El valor del ángulo* $\alpha$ *recibe el nombre de argumento (ver Figura 2.1).*

Para un número complejo dado, el argumento admite un conjunto infinito de valores, que se diferencian entre sí en $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Se llama *valor principal* del argumento $\alpha$ a aquél que cumple $0 \leq \alpha \leq 2\pi$.

**EJEMPLO 2.5** Sea z=3+4i. Entonces:

$$|3 + 4i| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \qquad \alpha = \operatorname{arc\,tg} 4/3$$

## 2.6. PROPIEDADES DEL MÓDULO

Sean $z_1,\ z_2, \ldots,\ z_n \in \mathbb{C}$. Se verifica:

1. $|z_1 \ldots z_2 \ldots z_n| = |z_1| \ldots |z_2| \ldots |z_n|$.
2. $|z_1/z_2| = |z_1|/|z_2|$, con $|z_2| \neq 0$.
3. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.
4. $|z_1 + z_2 + \ldots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \ldots + |z_n|$.

## 2.7. FORMA POLAR Y TRIGONOMÉTRICA DE UN COMPLEJO

El punto $(a, b)$ es el afijo del número complejo $z = a + bi$. En la Figura 2.1:

$$a = r \cdot \cos\alpha$$
$$b = r \cdot \operatorname{sen}\alpha$$

siendo $r$ el módulo de $z$ y $\alpha$ su argumento. De aquí se deduce que:

$$z = a + bi = r(\cos\alpha + i \cdot \operatorname{sen}\alpha)$$

Esta expresión es la llamada *forma trigonométrica* del número complejo. Algunas veces se emplea la abreviatura $cis\ \alpha$ en lugar de $\cos\alpha + i \cdot \operatorname{sen}\alpha$.

Otra forma de representar el complejo $z$, de módulo $r$ y argumento $\alpha$, sería $z = r_\alpha$, a la que se llama forma *polar* o *módulo-argumental*.

**EJEMPLO 2.6** Dado el número complejo $z = 1 + \sqrt{3}i$, escribirlo en forma polar y trigonométrica.

$$1 + \sqrt{3}i = 2_{\pi/3} = 2(\cos\pi/3 + i \cdot \operatorname{sen}\pi/3)$$

## 2.8. PRODUCTO Y COCIENTE DE COMPLEJOS EN FORMA POLAR

Sean los complejos $z_1 = r_\alpha = r(\cos\alpha + i \cdot \operatorname{sen}\alpha)$ y $z_2 = s_\beta = s(\cos\beta + i \cdot \operatorname{sen}\beta)$. Su producto:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 = r_\alpha \cdot s_\beta &= rs[\cos\alpha \cdot \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta + i(\operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta)] \\ &= rs[\cos(\alpha+\beta) + i \cdot \operatorname{sen}(\alpha+\beta)] = (rs)_{\alpha+\beta} \end{aligned}$$

Por lo tanto, el producto de dos complejos es otro complejo que tiene por módulo el producto de sus módulos y por argumento la suma de los argumentos.

De análoga forma, multiplicando y dividiendo por el conjugado del denominador, se demuestra que el cociente tiene por módulo el cociente de los módulos y por argumento la diferencia de los argumentos:

$$z_1/z_2 = r_\alpha/s_\beta = (r/s)_{\alpha-\beta}$$

**EJEMPLO 2.7** Dados los complejos $1 + \sqrt{3}i$ y $\sqrt{3} + i$, pasarlos a forma polar y efectuar su producto y cociente en dicha forma. Comparar con los resultados obtenidos en forma binómica.

En forma polar:

$$(1 + \sqrt{3}i)(\sqrt{3} + i) = 2_{\pi/3} \cdot 2_{\pi/6} = (2 \cdot 2)_{\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}} = 4_{\pi/2} = 4\left(\cos\frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right) = 4i$$

$$\frac{1 + \sqrt{3}i}{\sqrt{3} + i} = \frac{2_{\pi/3}}{2_{\pi/6}} = \left(\frac{2}{2}\right)_{\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}} = 1_{\pi/6} = \cos\frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen}\pi 6 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

En forma binómica:

$$(1 + \sqrt{3}i)(\sqrt{3} + i) = \sqrt{3} + i + 3i + \sqrt{3}i^2 = 4i$$

$$\frac{1 + \sqrt{3}i}{\sqrt{3} + i} = \frac{(1 + \sqrt{3}i)(\sqrt{3} - i)}{(\sqrt{3} + i)(\sqrt{3} - i)} = \frac{\sqrt{3} - i + 3i - \sqrt{3}i^2}{3 + 1} = \frac{2\sqrt{3} + 2i}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

## 2.9. POTENCIA DE UN NÚMERO COMPLEJO EN FORMA POLAR

Es consecuencia de lo anterior:

$$z^n = (r_\alpha)^n = r_\alpha \cdot r_\alpha \cdots r_\alpha = (r^n)_{n\alpha}$$

Este resultado se conoce con el nombre de *fórmula de Moivre* y viene a decir que la potencia $n$-ésima de un número complejo $r_\alpha$ es otro complejo de módulo $r^n$ y argumento $n$ veces el argumento del primero.

**EJEMPLO 2.8** Calcular $(1+i)^{10}$.

$$(1+i)^{10} = (\sqrt{2}_{\pi/4})^{10} = (2^5)_{5\pi/2} = 32i$$

## 2.10. RAÍCES N-ÉSIMAS DE UN NÚMERO COMPLEJO

Si se supone que $w = s_\beta$ es una raíz $n$-ésima del número complejo $z = r_\alpha$:

$$w^n = z \Longrightarrow (s_\beta)^n = (s^n)_{n\beta} = r_\alpha \Longrightarrow s^n = r,\ n\beta = \alpha + 2k\pi \Longrightarrow s = \sqrt[n]{r},\ \beta = (\alpha + 2k\pi)/n$$

con $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, ya que para $k = n$ se obtiene el mismo valor que para $k = 0$.

Existen, por tanto, $n$ raíces $n$-ésimas distintas, si $z \neq 0$.

**EJEMPLO 2.9** Calcular las raíces cúbicas de 2.

$r = 2$, $n = 3$ y $\alpha = 0$. Por tanto: $\sqrt[3]{2}_{2k\pi/3}$, con $k = 0, 1, 2$.

## 2.11. FÓRMULA DE EULER

Anticipando los desarrollos en serie de MacLaurin de las funciones $e^x$, $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ (Capítulo 7):

$$e^x = 1 + x + x^2/2! + x^3/3! + \ldots$$
$$\operatorname{sen} x = x - x^3/3! + x^5/5! - x^7/7! + \ldots$$
$$\cos x = 1 - x^2/2! + x^4/4! - x^6/6! + \ldots$$

Entonces:

$$\begin{aligned} e^{i\alpha} &= 1 + i\alpha - \alpha^2/2! - i\alpha^3/3! + \alpha^4/4! - \ldots \\ &= (1 - \alpha^2/2! + \alpha^4/4! + \ldots) + i \cdot (\alpha - \alpha^3/3! + \ldots) = \cos\alpha + i \cdot \operatorname{sen}\alpha \end{aligned}$$

Así, $z = r_\alpha = r(\cos\alpha + i \cdot \operatorname{sen}\alpha) = r \cdot e^{i\alpha}$. Esta última expresión es la llamada forma *canónica* o *exponencial* del número complejo.

La expresión $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i \cdot \operatorname{sen}\alpha$ es la llamada *fórmula de Euler*.

Dada $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i \cdot \operatorname{sen}\alpha$, sumando y restando $e^{-i\alpha} = \cos\alpha - i \cdot \operatorname{sen}\alpha$, se deducen las fórmulas:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}; \qquad \cos\alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}$$

**EJEMPLO 2.10** Escribir en forma canónica el número complejo $z = 1 + i$.

$$|z| = \sqrt{2}, \quad \alpha = \frac{\pi}{4}; \quad z = 1 + i = \sqrt{2} \cdot e^{(\pi/4)i}$$

## 2.12. LOGARITMO DE UN NÚMERO COMPLEJO

Sea el número complejo $z = r \cdot e^{i\alpha}$. Suponiendo que su logaritmo es el número complejo $x + iy$:

$$\ln z = \ln r + i\alpha = x + iy$$

Igualando:

$$x = \ln r$$
$$y = \alpha + 2k\pi$$

Por tanto, $\ln z = \ln r + (\alpha + 2k\pi)i$.

De lo anterior se desprende que el logaritmo de un complejo $z = re^{i\alpha}$ tiene infinitos valores, todos ellos con parte real igual a $\ln r$ y partes imaginarias que difieren entre sí en múltiplos de $2\pi$. De un modo gráfico, los afijos de los logaritmos están situados sobre una recta paralela al eje OY.

Para $k = 0$, se obtiene el llamado *valor principal*.

**EJEMPLO 2.11** Calcular $\ln(1 + 2i)$.

$$\ln(1 + 2i) = \ln\sqrt{5} + (1{,}10715 + 2k\pi)i = 0{,}80472 + (1{,}10715 + 2k\pi)i$$

Gráficamente:

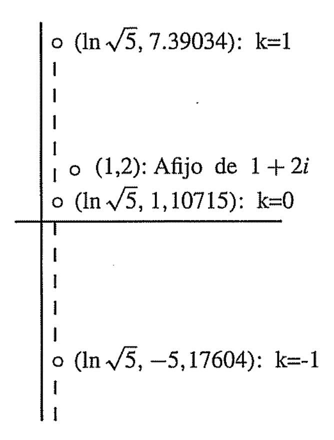



**Figura 2.2**

Se tienen ahora los complejos $z_1$ y $z_2$, y se desea calcular $\log_{z_1} z_2$. Llamando $H = \log_{z_1} z_2$, mediante la definición de logaritmo: $z_2 = z_1^H$. Tomando logaritmos naturales: $\ln z_2 = H \cdot \ln z_1$. Por tanto:

$$H = \log_{z_1} z_2 = \frac{\ln z_2}{\ln z_1}$$

**EJEMPLO 2.12** Calcular $\log_i(1 + i)$.

$$\log_i(1 + i) = \frac{\ln\sqrt{2} + (\pi/4 + 2k\pi)i}{(\pi/2 + 2k'\pi)i} = \frac{1 + 8k}{2 + 8k'} - \frac{\ln 2}{\pi + 4k'\pi} \cdot i$$

**EJEMPLO 2.13** Calcular $\log_i i$.

$$\frac{1 + 4k}{1 + 4k'}, \quad k, k' \in \mathbb{Z}$$

## 2.13. LAS FUNCIONES HIPERBÓLICAS

Las expresiones $\frac{e^x - e^{-x}}{2}$ y $\frac{e^x + e^{-x}}{2}$ son frecuentes en problemas de Ingeniería y Matemática aplicada. Se representan con $\operatorname{sh} x$ y $\operatorname{ch} x$, abreviaturas de seno hiperbólico y coseno hiperbólico. La razón de estas denominaciones estriba en que están relacionadas con la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$ de un modo análogo a cómo las funciones seno y coseno están relacionadas con la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$. En efecto, se prueba que:

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$$

Sustituyendo:

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = \left[\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right]^2 - \left[\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right]^2 = 1$$

que representa una fórmula análoga a $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ para las funciones circulares.

La fórmula $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$ sirve para justificar el adjetivo hiperbólico en las definiciones de $\operatorname{sh} x$ y $\operatorname{ch} x$. Las funciones seno y coseno se llaman circulares porque si $B$ es un punto de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$, y $t$ es la medida en radianes del arco $AB$, las coordenadas de $B$ son $(\cos t, \operatorname{sen} t)$. Del mismo modo, si $t$ recorre los números reales, el punto $B$, de coordenadas $(\operatorname{ch} t, \operatorname{sh} t)$, recorre la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$ (ver Figura 2.3). Sin embargo, en este caso la variable $t$ no representa un arco sino el doble del área del segmento parabólico $AOB$ (ver demostración en [14], A.I. Markushevich. *Números Complejos y Aplicaciones Conformes*. Ed. Mir).

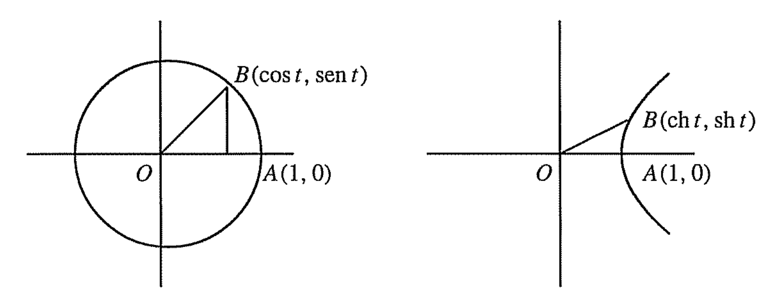



**Figura 2.3**

Para hacer las gráficas de $y = \operatorname{ch} x$ e $y = \operatorname{sh} x$, se representan las funciones $y = (1/2)e^x$ e $y = (1/2)e^{-x}$. Sumando y restando, se obtienen sus gráficas:

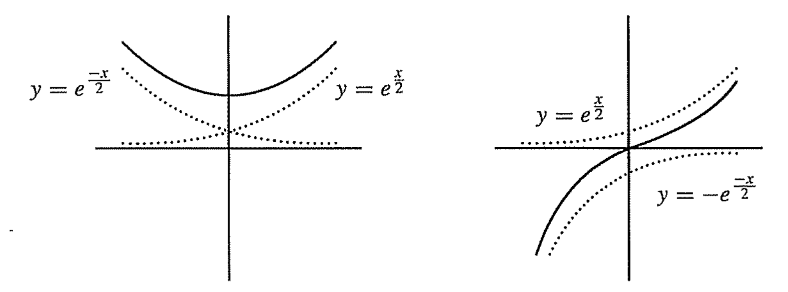



**Figura 2.4**

Por último, las funciones tangente, cotangente, secante y cosecante hiperbólicas se definen de un modo semejante a las funciones circulares:

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}; \quad \operatorname{cth} x = \frac{1}{\operatorname{th} x}$$

$$\operatorname{csch} x = \frac{1}{\operatorname{sh} x}; \quad \operatorname{sech} x = \frac{1}{\operatorname{ch} x}$$

## 2.14. RELACIÓN ENTRE LAS FUNCIONES CIRCULARES Y LAS HIPERBÓLICAS

Dado que:

$$\operatorname{sen} x = \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i} \qquad \cos x = \frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2i}$$

se tiene que:

$$\cos x = \operatorname{ch} ix \qquad \operatorname{ch} x = \cos ix$$
$$\operatorname{sen} x = (1/i)\cdot \operatorname{sh} ix \qquad \operatorname{sh} x = (1/i)\cdot \operatorname{sen} ix$$

# PROBLEMAS RESUELTOS

**2.1.** Resolver la ecuación $x^2 + 4x + 5 = 0$.

**Resolución**

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16-20}}{2} = -2 \pm i$$

**2.2.** Calcular $i^{743}$.

**Resolución**

$$i^{743} = i^{4\cdot 185+3} = (i^4)^{185}\cdot i^3 = 1\cdot i^3 = -i$$

**2.3.** Dados los números complejos $z_1 = 2 + i$ y $z_2 = 3 - 2i$, hallar:

a) $z_1 + z_2$.
b) $z_1 - z_2$.
c) $z_1 \cdot z_2$.
d) $z_1/z_2$.

**Resolución**

a) $z_1 + z_2 = (2+i) + (3-2i) = (2+3) + (1-2)i = 5 - i$.
b) $z_1 - z_2 = (2-3) + (1+2)i = -1 + 3i$.
c) $z_1 \cdot z_2 = (2+i)(3-2i) = 6 - 4i + 3i - 2i^2 = 8 - i$.
d) $z_1/z_2 = \dfrac{(2+i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)} = \dfrac{4}{13} + \dfrac{7}{13}\,i$.

**2.4.** Dado el número complejo $z = 1 - i$, escribirlo en forma polar, trigonométrica y exponencial.

**Resolución**

$$r = \sqrt{1 + (-1)} = \sqrt{2}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = -1/1 = -1 \Longrightarrow \alpha = \frac{7\pi}{4}$$

$$1 - i = \sqrt{2}_{\frac{7\pi}{4}} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i.\operatorname{sen}\frac{7\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cdot e^{\frac{7\pi}{4}\cdot i}$$

**2.5.** La suma de dos números complejos $z_1$ y $z_2$ es $2+4i$. La parte real de $z_2$ es $-1$ y el cociente $z_1/z_2$ es imaginario puro. Hallarlos.

**Resolución**

Sean $z_1 = a+bi$ y $z_2 = c+di$. Su suma y su cociente:

$$(a+bi)+(-1+di)=(a-1)+(b+d)i$$
$$\frac{a+bi}{-1+di}=\frac{(a+bi)(-1-di)}{(-1+di)(-1-di)}=\frac{-a+bd}{1+d^2}+\frac{-ad-b}{1+d^2}\,i$$

Por tanto:

$$\left.\begin{array}{r} a-1=2 \\ b+d=4 \\ -a+bd=0 \end{array}\right\}\quad \begin{array}{l} a=3,\ b=1,\ d=3 \\ a=3,\ b=3,\ d=1 \end{array}$$

Dos soluciones: $3+i$, $-1+3i$ y $3+3i$, $-1+i$.

**2.6.** ¿Qué relación debe existir entre $a$ y $b$ para que el cociente $\dfrac{z+1}{z-1}$ sea imaginario puro, siendo $z=a+bi$?

**Resolución**

$$\frac{z+1}{z-1}=\frac{(a+1)+bi}{(a+1)-bi}=\frac{[(a+1)+bi][(a-1)-bi]}{[(a-1)+bi][(a-1)-bi]}$$
$$=\frac{a^2-1-2bi+b^2}{(a-1)^2+b^2}=\frac{a^2+b^2-1}{(a-1)^2+b^2}-\frac{2bi}{(a-1)^2+b^2}$$

Para que sea imaginario puro ha de tener igual a cero su parte real:

$$a^2+b^2-1=0 \Longrightarrow a^2+b^2=1$$

**2.7.** Resolver la ecuación $z^3-1=0$.

**Resolución**

$z^3-1=0 \Longrightarrow z^3=\sqrt[3]{1}$. En forma polar:

$$z=\sqrt[3]{1+0\cdot i}=\sqrt[3]{1_{0^\circ}}$$

Las raíces son:

$$k=0:\ \sqrt[3]{1}_{\frac{0^\circ+360\cdot 0}{3}}=1_{0^\circ}=1\,(\cos 0^\circ+i\cdot \operatorname{sen} 0^\circ)=1$$

$$k=1:\ \sqrt[3]{1}_{\frac{0^\circ+360\cdot 1}{3}}=1_{120^\circ}=1\,(\cos 120^\circ+i\cdot \operatorname{sen} 120^\circ)=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\,i$$

$$k=2:\ \sqrt[3]{1}_{\frac{0^\circ+360\cdot 2}{3}}=1_{240^\circ}=1\,(\cos 240^\circ+i\cdot \operatorname{sen} 240^\circ)=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\,i$$

**2.8.** Dado $z\in\mathbb{C}$, siendo $x=Re(z)$, probar que $\left|\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{2}\right|<\dfrac{1}{2}$ si $x>1$.

**Resolución**

Sea $z = x + iy$:

$$\left|\frac{2-z}{2z}\right| < \frac{1}{2} \Longrightarrow |2-z| < |z| \Leftrightarrow \sqrt{(2-x)^2+y^2} < \sqrt{x^2+y^2}$$
$$\Longrightarrow (2-x)^2 < x^2 \Longrightarrow 4-4x+x^2 < x^2 \Longrightarrow 4-4x < 0$$

que se cumple para $x > 1$.

**2.9.** ¿Qué región del plano representa el conjunto:

$$A = \{z \in \mathbb{C} \,/\, z \cdot \overline{z} > 4\}?$$

**Resolución**

Sea $z = x + iy$. Entonces $z \cdot \overline{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 + y^2 > 4$, que es el exterior de una circunferencia de centro $(0, 0)$ y radio 2.

**2.10.** Dado $z \in \mathbb{C}$, siendo $x = Re(z)$, ¿qué región del plano representa el conjunto $|z| + x < 1$?

**Resolución**

Sea $z = x + iy$:

$$|z| + x = \sqrt{x^2+y^2} + x = 1 \Longrightarrow \sqrt{x^2+y^2} = 1 - x$$

Elevando al cuadrado:

$$y^2 = 1 - 2x$$

Entonces, $f(x, y) = \sqrt{x^2+y^2} + x < 1$, es el interior de la anterior parábola, ya que $f(0, 0) < 1$.

**2.11.** Determinar los números complejos $z$ que cumplen:

$$Im\left(\frac{a+z}{c+z}\right) = Im\, z$$

siendo $a, c \in \mathbb{R}$. Discutir las posibles soluciones según los valores de $a$ y $c$.

**Resolución**

Sea $z = x + iy$:

$$\frac{a+z}{c+z} = \frac{a+x+iy}{c+x+iy} \cdot \frac{c+x-iy}{c+x-iy}$$
$$= \frac{(a+x)(c+x)+y^2}{(c+x)^2+y^2} + \frac{(c+x)y-(a+x)y}{(c+x)^2+y^2}\, i$$
$$\Longrightarrow \frac{(c+x)y-(a+x)y}{(c+x)^2+y^2} = y \Longrightarrow (c-a)y = y[(c+x)^2+y^2]$$

Si $y = 0$, la solución es el eje OX.
Si $c - a = (c+x)^2 + y^2 \Longrightarrow (x+c)^2 + y^2 = c - a$:

$c - a > 0$, circunferencia de centro $(-c, 0)$ y radio $\sqrt{c-a}$.
$c - a < 0$, no hay solución.

**2.12.** Hallar el módulo y argumento, tomando el argumento principal: $z = i^i$.

**Resolución**

$\ln z = i \cdot \ln i = i \cdot \ln e^{\frac{\pi}{2} \cdot i} = i \cdot i \cdot \frac{\pi}{2} = \dfrac{-\pi}{2}$

En forma exponencial: $z = e^{\frac{-\pi}{2}} \Longrightarrow r = e^{\frac{-\pi}{2}}, \alpha = 0.$

**2.13.** Hallar el módulo y argumento, tomando el argumento principal: $z = i^{1+i}$.

**Resolución**

$$\ln\ z = (1+i) \cdot \ln i = (1+i) \cdot \ln(1 \cdot e^{\frac{\pi}{2} \cdot i}) = (1+i) \cdot i \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{-\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \cdot i$$
$$z = e^{\frac{-\pi}{2}} \cdot e^{\frac{\pi}{2} \cdot i} \Longrightarrow r = e^{\frac{-\pi}{2}},\ \alpha = \frac{\pi}{2}$$

**2.14.** Hallar el módulo y argumento, tomando el argumento principal: $z = 2^i$.

**Resolución**

$\ln z = i \cdot \ln 2 \Longrightarrow z = e^{i \cdot \ln 2} \Longrightarrow r = 1,\ \alpha = \ln 2$

**2.15.** Hallar el módulo y argumento, tomando el argumento principal: $z = (1 + \sqrt{3}i)^{1+i}$.

**Resolución**

$$\ln z = (1+i) \cdot \ln(1+\sqrt{3}i) = (1+i) \cdot \ln(2 \cdot e^{\frac{\pi}{3} \cdot i}) = (1+i) \cdot \left(\ln 2 + \frac{\pi}{3} \cdot i\right)$$
$$= \left(\ln 2 - \frac{\pi}{3}\right) + \left(\ln 2 + \frac{\pi}{3}\right) \cdot i$$
$$z = e^{\ln 2 - \frac{\pi}{3}} \cdot e^{(\ln 2 + \frac{\pi}{3}) \cdot i} \Longrightarrow r = e^{\ln 2 - \frac{\pi}{3}},\ \alpha = \ln 2 + \frac{\pi}{3}$$

**2.16.** Calcular $i^{\ln i}$.

**Resolución**

$i^{\ln i} = e^{\ln i \cdot \ln i} = e^{(\ln i)^2}$

Por otra parte:

$$\ln i = \ln 1 + i \cdot \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = i \cdot \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right),\ k \in \mathbb{Z}$$
$$(\ln i)^2 = -\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)^2 \Longrightarrow i^{\ln i} = e^{-(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)^2}$$

**2.17.** Calcular $\sqrt[i]{2 + \ln i}$ (utilizar el argumento principal).

**Resolución**

$z = \sqrt[i]{2 + \ln i} = (2 + \ln i)^{1/i}$

$$\ln z = \frac{\ln(2+\ln i)}{i} = \frac{\ln\left(2+\frac{\pi}{2}\cdot i\right)}{i}$$

$$= \frac{\ln\left(\sqrt{4+\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}.e^{(\operatorname{arc\,tg}\frac{\pi}{4}+2k\pi)\cdot i}\right)}{i} = \frac{\ln\left(\sqrt{4+\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}\right)+\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\cdot i}{i}$$

$$= \operatorname{arc\,tg}\frac{\pi}{4}+2k\pi - \ln\sqrt{4+\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}\cdot i$$

$$z = e^{\operatorname{arc\,tg}\frac{\pi}{4}+2k\pi-\ln\sqrt{4+(\frac{\pi}{2})^2}\cdot i} \quad \text{con } k=0$$

**2.18.** Resolver la ecuación $\operatorname{sen} x = 3$.

**Resolución**

$$\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} = 3 \Longrightarrow e^{ix}-e^{-ix} = 6i \Longrightarrow e^{ix}-\frac{1}{e^{ix}} = 6i$$

$$\Longrightarrow e^{2ix}-6ie^{ix}-1=0 \Longrightarrow e^{ix} = (3\pm 2\sqrt{2})\cdot i$$

$$ix = \ln[(3\pm 2\sqrt{2})\cdot i] = \ln(3\pm 2\sqrt{2})+\ln\ i = \ln(3\pm 2\sqrt{2})+\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)\cdot i$$

$$x = \left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right) - i\cdot\ln(3\pm 2\sqrt{2})$$

**2.19.** Resolver la ecuación $\operatorname{tg} x = i/2$.

**Resolución**

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}}{\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}} = \frac{i}{2} \Longrightarrow \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{e^{ix}+e^{-ix}} = -\frac{1}{2} \Longrightarrow 3e^{2ix} = 1$$

$$\Longrightarrow e^{2ix} = \frac{1}{3} \Longrightarrow 2ix = \ln\frac{1}{3}+2k\pi i \Longrightarrow x = -\frac{i}{2}\ \ln\frac{1}{3}+k\pi$$

**2.20.** Resolver la ecuación $e^{\frac{z+i}{z}} = 1-i$.

**Resolución**

$$\frac{z+i}{z} = \ln(1-i) = \ln\sqrt{2}+\left(2k\pi-\frac{\pi}{4}\right)i$$

$$z+i = z\left[\ln\sqrt{2}+\left(2k\pi-\frac{\pi}{4}\right)\cdot i\right] \Longrightarrow z\left[1-\ln\sqrt{2}-\left(2k\pi-\frac{\pi}{4}\right)\cdot i\right] = -i$$

$$z = \frac{i}{-1+\ln\sqrt{2}+\left(2k\pi-\frac{\pi}{4}\right)\cdot i}\cdot\frac{-1+\ln\sqrt{2}-\left(2k\pi-\frac{\pi}{4}\right)\cdot i}{-1+\ln\sqrt{2}-\left(2k\pi-\frac{\pi}{4}\right)\cdot i}$$

$$= \frac{2k\pi-\frac{\pi}{4}+i(-1+\ln\sqrt{2})}{(-1+\ln\sqrt{2})^2+\left(2k\pi-\frac{\pi}{4}\right)^2}$$

**2.21.** Si $z + \frac{1}{z} = 2 \cdot \cos t$, hallar $z^n + \frac{1}{z^n}$.

**Resolución**

Resolviendo $z^2 - 2z \cdot \cos t + 1 = 0$, se obtiene $z = \cos t \pm i \cdot \operatorname{sen} t$.

$$z^n = (\cos t + i \cdot \operatorname{sen} t)^n = \cos nt + i \cdot \operatorname{sen} nt$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{\cos t + i \cdot \operatorname{sen} t} = \frac{\cos t - i \cdot \operatorname{sen} t}{\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t} = \cos t - i \cdot \operatorname{sen} t$$

$$\left(\frac{1}{z}\right)^n = (\cos t - i \cdot \operatorname{sen} t)^n = \cos nt - i \cdot \operatorname{sen} nt$$

$$z^n + \left(\frac{1}{z}\right)^n = 2 \cdot \cos nt$$

Del mismo modo se hace con $\cos t - i \cdot \operatorname{sen} t$.

**2.22.** Demostrar la identidad $\operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x = e^x$

**Resolución**

$$\operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} + \frac{e^x + e^{-x}}{2} = e^x.$$

# PROBLEMAS PROPUESTOS

En los siguientes ejercicios, expresar los números complejos en forma polar, trigonométrica y exponencial:

**2.23.** $2 + 2i$.

**2.24.** $1 + \sqrt{3} \cdot i$.

**2.25.** $i$.

En los siguientes ejercicios, efectuar el producto y el cociente de los complejos $z_1$ y $z_2$ en forma binómica; pasarlos a forma polar, y efectuar su producto y cociente en esta forma, comparando los resultados obtenidos:

**2.26.** $z_1 = 1 + i, \; z_2 = i$.

**2.27.** $z_1 = \sqrt{3} + i, \; z_2 = -1 + \sqrt{3}i$.

En los siguientes ejercicios, calcular:

**2.28.** $\sqrt[3]{1+i}$.

**2.29.** $\sqrt[4]{-i}$.

**2.30.** $\sqrt[3]{-8}$.

**2.31.** Las raíces de una ecuación de segundo grado son $2 + i$ y $2 - i$. Escribir dicha ecuación.

**2.32.** Resolver la ecuación $\frac{1}{x} + \frac{2}{1+i} = 2 + 3i$.

**2.33.** Una raíz cúbica de un número complejo es igual a $1+i$. Hallar dicho número complejo y sus otras dos raíces.

**2.34.** Hallar dos números complejos tales que el primero sea imaginario puro, el módulo del segundo sea igual a $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ y que la suma de ambos sea igual a su producto.

**2.35.** Hallar un número complejo tal que su cuadrado sea igual a su conjugado.

**2.36.** Demostrar que el cociente de dos números complejos tiene por módulo el cociente de los módulos y por argumento la diferencia de los argumentos.

En los siguientes ejercicios, hallar los números complejos que cumplen:

**2.37.** $a+bi=|a+bi|$.

**2.38.** $(a+bi)^2=(a-bi)^2$.

**2.39.** $|a+bi|=|a-bi|$.

**2.40.** Demostrar que si $z$ es una raíz $n$-ésima de 1 ($z\neq 1$), se cumple que $1+z+z^2+z^3+\ldots+z^{n-1}=0$.

**2.41.** Hallar el valor de $\alpha$ sabiendo que:

$$(\cos\alpha+i\cdot\operatorname{sen}\alpha)\cdot(\cos 2\alpha+i\cdot\operatorname{sen}2\alpha)\ldots(\cos 50\alpha+i\cdot\operatorname{sen}50\alpha)=1$$

*Sugerencia*: escribirlos en forma polar.

En los siguientes ejercicios, demostrar las identidades:

**2.42.** $\operatorname{ch}x-\operatorname{sh}x=e^{-x}$.

**2.43.** $\operatorname{sh}(x+y)=\operatorname{sh}x\cdot\operatorname{ch}y+\operatorname{ch}x\cdot\operatorname{sh}y$.

**2.44.** $\operatorname{ch}2x=\operatorname{ch}^2x+\operatorname{sh}^2y$.

**2.45.** $\operatorname{ch}2x=\operatorname{ch}^2x+\operatorname{sh}^2x$.

**2.46.** $\cos z=\operatorname{ch}iz$.

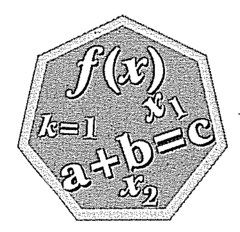
**2.47.** $\operatorname{ch}z=\cos iz$.

**2.48.** $\operatorname{sen}z=\dfrac{1}{i}\cdot\operatorname{sh}iz$.

**2.49.** $\operatorname{sh}z=\dfrac{1}{i}\cdot\operatorname{sen}iz$.

**2.50.** Escribir en forma binómica $e^{\sqrt{i}}$.

**2.51.** Calcular $\operatorname{sen}i$.




CAPÍTULO



# SUCESIONES

En este capítulo se introducirá el importante concepto de *límite de una sucesión*, haciendo hincapié en los diversos tipos de límites indeterminados. Al final, se introducirán las sucesiones de Cauchy.

## 3.1. DEFINICIONES

● DEFINICIÓN 3.1 *Una sucesión de números reales es una aplicación del conjunto* $\mathbb{N}$ *en el conjunto* $\mathbb{R}$.

Los términos de la sucesión se numeran mediante subíndices: $a_1$ designa el primer término, $a_2$, el segundo, etc. Así pues:

$$\begin{aligned} 1 \in \mathbb{N} &\to a_1 \in \mathbb{R} \\ 2 \in \mathbb{N} &\to a_2 \in \mathbb{R} \\ 3 \in \mathbb{N} &\to a_3 \in \mathbb{R} \\ \ldots&\ldots\ldots \end{aligned}$$

La sucesión se representa por $\{a_n\}$ y queda determinada de distintas formas:

1. Mediante una expresión llamada *término general* en la que aparece la letra $n$ que, al tomar valores naturales, da lugar a los términos de la sucesión. Por ejemplo, si $\{a_n\} = \dfrac{1}{n}$:

$$a_1 = 1,\; a_2 = \frac{1}{2},\; a_3 = \frac{1}{3}, \cdots$$

2. Dando algunos de sus términos: $1, -2, 3, -4$, etc.
   Esta forma es la menos conveniente debido a su ambigüedad.
3. De forma recurrente, expresando cada término en función del término o términos que le preceden. Por ejemplo, la llamada sucesión de Fibonacci: $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2},\ \forall n \geq 3$, esto es, $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$

● DEFINICIÓN 3.2 *Si* $a \in \mathbb{R}$, *la sucesión cuyos términos son todos iguales a* $a$, *recibe el nombre de sucesión constante.*

● DEFINICIÓN 3.3 *Una sucesión es monótona creciente si $a_n \leq a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Análogamente, se define sucesión monótona decreciente.*

**EJEMPLO 3.1** La sucesión $\{a_n\} = \dfrac{1}{n}$ es monótona decreciente.

● DEFINICIÓN 3.4 *Se dice que la sucesión $\{a_n\}$ está acotada superiormente si existe $k \in \mathbb{R} \,/ a_n \leq k$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Análogamente se define sucesión acotada inferiormente. Si una sucesión está acotada superior e inferiormente, se dice que está acotada.*

**EJEMPLO 3.2** La sucesión del ejemplo anterior, $\{a_n\} = \dfrac{1}{n}$, está acotada entre 0 y 1.

## 3.2. LÍMITE DE UNA SUCESIÓN

● DEFINICIÓN 3.5 *El número $a \in \mathbb{R}$ es el límite de la sucesión $\{a_n\}$ si todo entorno de $a$ contiene los infinitos términos de dicha sucesión desde uno de ellos en adelante, es decir, en todo entorno de $a$ existen infinitos términos, quedando fuera de él un número finito.*

**EJEMPLO 3.3** En la sucesión anterior, de término general $\{a_n\} = \dfrac{1}{n}$, el límite es cero, pues si se toma un entorno cualquiera de cero, por ejemplo $(-0.1, 0.1)$, los infinitos términos, a partir de $a_{10}$, están todos dentro de dicho entorno, quedando fuera de él los diez primeros.

● DEFINICIÓN 3.6 *Dicho de otra forma, se dice que $a$ es el límite de la sucesión $\{a_n\}$ si $\forall \epsilon > 0 \exists\, \delta$ ($\delta$ función de $\epsilon$), tal que si $n > \delta$ se verifica $|a_n - a| < \epsilon$.*

**EJEMPLO 3.4** En efecto, en la sucesión del ejemplo anterior, $\{a_n\} = \dfrac{1}{n}$, el límite es igual a cero, ya que si se toma $\epsilon = 0{,}1$, se tiene que $\delta = 10$, puesto que a partir de $a_{10}$ se cumple que $|a_n - 0| < 0{,}1$. Tomando $\epsilon = 0{,}01$, se tendría que $\delta = 100$.

Que el límite de la sucesión $\{a_n\}$ es $a$, se representa:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

y se lee "el límite cuando $n$ tiende a infinito de $\{a_n\}$ es igual a $a$".

Consecuencia de la definición de límite es la siguiente proposición:

■ PROPOSICIÓN 3.1 *Si una sucesión tiene límite, éste es único.*

DEMOSTRACIÓN. Por reducción al absurdo. Se supone que la sucesión $\{a_n\}$ tiene dos límites distintos $a$ y $a'$, $a < a'$. Si $d = a' - a$, tomando dos entornos $E$ y $E'$, de radios menores que $d/2$ y centros respectivos $a$ y $a'$, cada uno de ellos debe contener infinitos términos de la sucesión, salvo un número finito. Esto es absurdo y, por tanto, $a = a'$. ■

**EJEMPLO 3.5** La sucesión $\{a_n\} = (-1)^n \dfrac{n+1}{n}$ aparenta poseer dos límites: 1 y $-1$. Pero tanto 1 como $-1$ no cumplen la definición de límite, ya que tomando un entorno suficientemente pequeño de uno de ellos, a pesar de que contiene infinitos términos de la sucesión, quedan fuera, en las proximidades del otro, infinitos términos. A 1 y $-1$ se les llama *puntos de acumulación*, ya que no se les puede llamar límites.

● DEFINICIÓN 3.7 *A toda sucesión que posee límite se le llama convergente.*

■ PROPOSICIÓN 3.2 *Toda sucesión monótona creciente (decreciente) y acotada superiormente (inferiormente) es convergente.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $M$, tal que $a_n \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Entonces, se cumple que $a_1 \leq a_n \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Es decir, en el intervalo $[a_1, M]$ están todos los términos de la sucesión. Se divide dicho intervalo en dos subintervalos $\left[a_1, \dfrac{a_1+M}{2}\right]$ y $\left[\dfrac{a_1+M}{2}, M\right]$, y se toma aquel intervalo que contiene infinitos puntos; se repite el proceso infinitas veces y se obtiene una sucesión de intervalos que definen un único punto común (postulado de Cantor, Sección 1.12), que es el límite de $a_n$, ya que cualquier intervalo que contenga a dicho punto contendrá infinitos términos de la sucesión.

De modo análogo se demostraría para una sucesión decreciente y acotada inferiormente. ■

## 3.3. SUCESIONES DIVERGENTES

● DEFINICIÓN 3.8 *Se dice que una sucesión $\{a_n\}$ es divergente si, fijado un número real $K$, existe un número natural $\delta$ ($\delta$ función de $K$) tal que $\forall n > \delta$ se verifica $|a_n| > K$.*

**EJEMPLO 3.6** Por ejemplo, la sucesión $\{a_n\} = 2n$ diverge, ya que si se toma $K = 1000$, entonces $\delta = 500$, puesto que a partir de $a_{500}$ todos los términos son mayores que $K$. Análogamente, si $K = 2000$, entonces $\delta = 1000$.

En la definición se ha tomado $a_n$ en valor absoluto para incluir entre las divergentes aquellas sucesiones que tienden a $-\infty$ y aquellas otras que tienden, simultáneamente, a $+\infty$ y a $-\infty$, como la sucesión $\{a_n\} = (-1)^n\, n$.

## 3.4. CLASIFICACIÓN DE LAS SUCESIONES

Toda sucesión pertenece a uno de estos tres grupos:

1. Convergentes (que tienen límite).
2. Divergentes (que tienden a infinito).
3. Oscilantes (que no son convergentes ni divergentes).

## 3.5. OPERACIONES CON SUCESIONES

● DEFINICIÓN 3.9 *Dadas dos sucesiones, $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$, se llama suma de ellas dos a la sucesión $\{c_n\}$, cuyos términos se obtienen de la forma $c_i = a_i + b_i$, $\forall i \in \mathbb{N}$. Análogamente se definen el producto y cociente de sucesiones. Este último siempre y cuando los términos del denominador sean distintos de cero.*

**EJEMPLO 3.7** Sean:

$$\{a_n\} = \frac{n+1}{n} = 2, 3/2, 4/3, 5/4, 6/5, \ldots$$

$$\{b_n\} = \frac{1}{n} = 1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, \ldots$$

Su suma: $\{a_n + b_n\} = \dfrac{n+2}{n} = 3, 4/2, 5/3, 6/4, 7/5, \ldots$

Su producto y cociente:

$$\{a_n \cdot b_n\} = \frac{n+1}{n^2} = 2, 3/4, 4/9, 5/16, 6/25, \ldots$$

$$\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\} = n+1 = 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$$

## 3.6. PROPIEDADES DE LOS LÍMITES

Dadas dos sucesiones convergentes, $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$, con límites respectivos $a$ y $b$, se verifica:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.
2. $\lim\limits_{n\to\infty} k \cdot a_n = k \cdot \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.
3. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.
4. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n / b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n / \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

siendo los términos de $b_n$ distintos de cero, y presentándose los casos siguientes:

- Si $a \neq 0$ y $b \neq 0$, la sucesión cociente es convergente de límite $a/b$.
- Si $a = 0$ y $b \neq 0$, la sucesión cociente es convergente de límite cero.

**EJEMPLO 3.8** Si $\{a_n\} = \dfrac{1}{n}$ y $\{b_n\} = \dfrac{n+1}{n} \Longrightarrow \left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\} = \dfrac{1}{n+1}$, convergente de límite cero.

Si $a \neq 0$ y $b = 0$, la sucesión cociente es divergente.

**EJEMPLO 3.9** Tomando $\{a_n\} = \dfrac{n+1}{n}$ y $\{b_n\} = \dfrac{1}{n}$, entonces $\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\} = n+1$ es divergente.

Si $a = 0$ y $b = 0$, el límite del cociente es indeterminado y se simboliza $0/0$.

**EJEMPLO 3.10** Sean $\{a_n\} = \dfrac{1}{n}$ y $\{b_n\} = \dfrac{1}{n^2}$ convergentes a cero. Su cociente es $\{c_n\} = \left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\} = n$, divergente. Sin embargo, el cociente de $\{a_n\} = \dfrac{2}{n^2}$ y $\{b_n\} = \dfrac{1}{n}$ es $\{c_n\} = \left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\} = \dfrac{2}{n}$, que converge a cero. Así, el cociente de dos sucesiones convergentes a cero puede ser convergente o divergente y, en principio, indeterminado.

Si $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ convergen a cero, el límite de $(a_n)^{b_n}$ es indeterminado. Se simboliza $0^0$.

## 3.7. OPERACIONES CON SUCESIONES DIVERGENTES

1. La suma de dos sucesiones divergentes del mismo signo es otra sucesión divergente del mismo signo que las anteriores.
2. La suma de una sucesión convergente y una sucesión divergente es una sucesión divergente del mismo signo que ésta.
3. El límite de la diferencia de dos sucesiones divergentes del mismo signo es indeterminado. Se simboliza $\infty - \infty$.
4. El producto de dos sucesiones divergentes es una sucesión divergente.
5. El producto de una sucesión divergente por una convergente (que no tiende a cero) es una sucesión divergente.
6. El producto de una sucesión convergente a cero por una sucesión divergente es indeterminado. Se simboliza $0.\infty$.

**EJEMPLO 3.11** Sean $\{a_n\} = \dfrac{1}{n^2}$ y $\{b_n\} = n$. Su producto es $\{a_n \cdot b_n\} = \dfrac{1}{n}$, que converge a cero. Sin embargo, el producto de $\{c_n\} = \dfrac{1}{n}$ y $\{d_n\} = n^2$ es $\{c_n \cdot d_n\} = n$, que es divergente.

7. El límite del cociente de dos sucesiones divergentes es indeterminado. Se simboliza $\dfrac{\infty}{\infty}$.
8. El cociente de una sucesión convergente y una divergente es una sucesión convergente a cero.

9. Por último, si la sucesión $\{a_n\}$ diverge y la $\{b_n\}$ converge a cero, el límite de $(a_n)^{b_n}$ es una indeterminación que se simboliza $\infty^0$.

Hay una serie de procedimientos para salvar todas estas indeterminaciones, como se verá a continuación.

## 3.8. CÁLCULO DE LÍMITES

Se va a ver ahora un conjunto de procedimientos y técnicas para calcular límites:

1. Límite del cociente de dos polinomios. Sea:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_p n^p + a_{p-1}n^{p-1} + \cdots + a_1 n + a_0}{b_q n^q + b_{q-1}n^{q-1} + \cdots + b_1 n + b_0}$$

donde $a_p \neq 0$, $b_q \neq 0$, $p, q \in \mathbb{N}$. El límite es indeterminado, de la forma $\frac{\infty}{\infty}$; se resuelve la indeterminación dividiendo el numerador y el denominador por la mayor potencia de $n$, existiendo tres posibilidades:

a. $p = q$. Se divide por $n^p$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_p + \dfrac{a_{p-1}}{n} + \dfrac{a_{p-2}}{n^2} + \cdots + \dfrac{a_1}{n^{p-1}} + \dfrac{a_0}{n^p}}{b_q + \dfrac{b_{q-1}}{n} + \dfrac{b_{q-2}}{n^2} + \cdots + \dfrac{b_1}{n^{p-1}} + \dfrac{b_0}{n^p}}$$

El límite del numerador es $a_p$ y el del denominador es $b_q$. Por tanto, el límite es $a_p/b_q$.

b. $p > q$. Dividiendo por $n^p$, se observa que el numerador tiene por límite $a_p$, siendo el límite del denominador igual a cero. Por tanto, el límite es $\infty$.

c. $p < q$. Se procede de un modo análogo y el límite es igual a cero.

2. Límites en los que aparecen expresiones irracionales. La forma habitual de hacerlos es multiplicar y dividir por el conjugado o por una expresión adecuada.
3. Límites del tipo $\infty^0$ y $0^0$. Suelen hacerse tomando logaritmos.
4. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - a_{n-1}) = a \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{n} = a.$
5. Criterio de Stolz-Cesàro. Si existe:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} \qquad \text{(I)}$$

entonces existe:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \qquad \text{(II)}$$

y se verifica $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}$, cuando:

a) $b_n$ es estrictamente creciente y divergente, o bien,

b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ y la sucesión de término general $b_n$ es monótona.

Está claro que aunque no exista el límite de la expresión (I) puede existir el de la expresión (II).

6. Criterio de la media aritmética:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a$$

7. Criterio de la media geométrica. Si $a_n > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \ldots a_n} = a$$

8. Criterio del cociente-raíz. Si $a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = a$$

9. Fórmula de Stirling. Esta fórmula es de utilidad en algunos límites:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\cdot n^n \cdot e^{-n}} = 1$$

## 3.9. ÓRDENES DE INFINITUD PARA $n \to \infty$

A veces son de gran utilidad las desigualdades:

$$n^n > n! > a^n > n^\alpha > \ln n, \quad \text{con } a > 1 \text{ y } \alpha > 0.$$

Cuando $n \to \infty$, el límite del cociente de una de ellas entre otra menor es infinito. Análogamente, el límite del cociente de una de ellas entre otra mayor es cero.

## 3.10. EL NÚMERO $e$

Se va ahora a estudiar la sucesión

$$\{a_n\} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Dando valores a $n$:

$$a_1 = (1+1)^1 = 2$$

$$a_2 = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 2{,}25$$

$$a_3 = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 = 2{,}37\ldots$$

$$a_4 = \left(1 + \frac{1}{4}\right)^4 = 2{,}44\ldots$$

.....................

La distancia entre los sucesivos términos de la sucesión se va reduciendo, lo que hace sospechar que la sucesión debe converger a un número real comprendido entre 2 y 3. Si se dan valores más altos:

$$a_{10} = \left(1 + \frac{1}{10}\right)^{10} = 2{,}5937\ldots$$

.....................................

$$a_{100} = \left(1 + \frac{1}{100}\right)^{100} = 2{,}7048\ldots$$

.....................................

$$a_{1000} = \left(1 + \frac{1}{1000}\right)^{1000} = 2{,}7169\ldots$$

.....................................

$$a_{10000} = \left(1 + \frac{1}{10000}\right)^{10000} = 2{,}71814\ldots$$

.....................................

$$a_{100000} = \left(1 + \frac{1}{100000}\right)^{100000} = 2{,}7182682\ldots$$

Observando las cifras que se repiten, se obtiene el límite de esta sucesión, 2,7182818284..., un número irracional trascendente (Sección 1.3) que se designa con la letra $e$, en recuerdo de Euler. Por tanto:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2{,}7182818284\ldots$$

Además, se puede demostrar que $e$ no sólo es el límite de la sucesión de término general $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, sino de $\left(1+\frac{1}{p}\right)^p$, siendo $p$ cualquier expresión real que tienda a $\infty$.

Por otra parte, es inmediato que:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e$$

tomando $x = 1/n$. En general:

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = \lim_{n\to\infty} e^{b_n(a_n-1)}$$

si $a_n \to 1$, $b_n \to \infty$.

## 3.11. APLICACIONES DEL NÚMERO $e$

Se va a calcular el capital final $C$ en que se convierte un capital inicial $c$, colocado a interés continuo. Su importancia radica en el hecho de que este razonamiento sirve de modelo para muchas aplicaciones: desintegración radiactiva de una sustancia, demografía, crecimiento de una colonia de bacterias, etc.

Si se coloca, a interés simple y al tanto por cien anual $r$, un capital de $c$ euros, al cabo de un año $c$ se ha convertido en $C = c + \frac{cr}{100}$. Sería mejor calcular los intereses semestralmente, ya que de este modo los intereses de los primeros seis meses producirían nuevos intereses los seis meses siguientes. O mejor sería que el cálculo de intereses se hiciera mensualmente, ya que los intereses del primer mes producirían nuevos intereses el segundo, tercer, cuarto mes, etc., al igual que los intereses de éstos en meses sucesivos. Y aún mejor sería que el cómputo de intereses se hiciera cada dia, cada hora, cada minuto, cada segundo, etc., es decir, en intervalos de tiempo infinitamente pequeños. Este tipo de interés se llama *interés continuo* cuando los intereses se acumulan al capital de modo instantáneo.

Para su cálculo, se va a dividir el año en $p$ partes iguales y se va a utilizar el tanto por uno anual $r$, en lugar del tanto por ciento del interés simple. Suponiendo que se dispone de un capital $c$, al finalizar la primera de las $p$ partes un euro se ha transformado en $1 + r/p$.

Al final de la segunda parte, el euro ha producido unos intereses iguales a $r/p$, y los intereses han producido a su vez unos intereses iguales a $(r/p)^2$, como se puede ver fácilmente. Por tanto, al final de la segunda de las $p$ partes, el euro se ha transformado en:

$$1+\frac{r}{p}+\frac{r}{p}+\left(\frac{r}{p}\right)^2 = \left(1+\frac{r}{p}\right)^2$$

Al final de la tercera parte: $\left(1+\frac{r}{p}\right)^3$.

Al final del año, esto es, al final de la última de las $p$ partes: $\left(1+\frac{r}{p}\right)^p$.

Si el capital es $c$, al cabo del año: $c\left(1+\frac{r}{p}\right)^p$.

Si en lugar de un año fuesen $t$ años: $c\left(1+\frac{r}{p}\right)^{pt}$.

Cuando $p \to \infty$, cada una de las partes en que se ha dividido el año tiende a cero y los intereses se acumulan al capital de un modo instantáneo. Entonces, el capital final $C$ producido por un capital inicial $c$, al tanto por uno anual $r$ durante $t$ años, es:

$$C = \lim_{p\to\infty} c\left(1+\frac{r}{p}\right)^{pt} = c\cdot e^{rt}$$

El interés del desarrollo anterior está en que el mismo razonamiento es aplicable a problemas de diversas ciencias.

**EJEMPLO 3.12** Se coloca un capital de 50000 euros al 0,15 por uno anual y a interés continuo, durante cinco años. ¿Cuál es el capital final C?

$C = c \cdot e^{rt} = 50000 \cdot e^{0,15\times 5} = 105850$ €

**EJEMPLO 3.13** Una sustancia radiactiva tiene una vida media de 1000 años. Dentro de 3000 años, ¿qué cantidad quedará de 2 gramos de dicha sustancia?

$C = 2.e^{-0,001\times 3000} = 2.e^{-3} = 0,099$ gr

## 3.12. SUCESIONES DE CAUCHY

Aparte de la sucesiones convergentes, cuyos términos están tan próximos al límite como se desee, se puede definir en un cuerpo ordenado $K$ otro tipo de sucesiones cuyos términos están tan próximos entre sí como se quiera.

● DEFINICIÓN 3.10 *Dada la sucesión $\{a_n\}$, con elementos de un cuerpo ordenado $K$, se dice que es regular, fundamental o de Cauchy si, y sólo si:*

$$\forall\epsilon \in K^+,\ \exists\delta \in \mathbb{N} \ / \ |a_p - a_q| < \epsilon,\ \forall p, q > \delta,\ \ p, q \in \mathbb{N}$$

En la anterior definición, no aparece el concepto de límite. Sin embargo:

■ PROPOSICIÓN 3.3 *Toda sucesión convergente en un cuerpo ordenado $K$ es de Cauchy en $K$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Longrightarrow \forall\epsilon \in K^+, \exists\delta \in \mathbb{N} \ / \ |a_n - a| < \epsilon/2,\ \forall n > \delta$$

Tomando $p > \delta$ y $q > \delta$:

$$|a_p - a_q| = |(a_p - a) - (a_q - a)| \leq |a_p - a| + |a_q - a| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \ ■$$

Si $K = \mathbb{R}$, la proposición recíproca de la anterior también se verifica. Sin embargo, en un cuerpo ordenado cualquiera $K$, aunque toda sucesión convergente es de Cauchy, pueden existir sucesiones de Cauchy que no sean convergentes. Por ejemplo, en el cuerpo $\mathbb{Q}$, la sucesión $1,\ 1{,}4,\ 1{,}41,\ 1{,}414, \ldots$, es de Cauchy y no convergente en $\mathbb{Q}$, ya que su límite, $\sqrt{2}$, no pertenece a $\mathbb{Q}$ (Sección 1.14).

# PROBLEMAS RESUELTOS

En los siguientes ejercicios, hallar el término general, el límite (si lo tienen), y clasificar las sucesiones:

**3.1.** $1/2,\ 4/3,\ 9/4,\ 16/5, \ldots$

**Resolución**

$\{a_n\} = \dfrac{n^2}{n+1}$. Su límite: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{n+1} = \dfrac{\infty}{\infty}$ (indeterminado)

Dividiendo numerador y denominador por $n^2$: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}} = \dfrac{1}{0} = \infty.$

Por tanto, la sucesión es divergente.

**3.2.** 4/5, 7/9, 10/13, 13/17, ...

**Resolución**

El numerador y denominador son dos progresiones aritméticas. Por tanto, $\{a_n\} = \dfrac{3n+1}{4n+1}$.

Su límite: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n+1}{4n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3+1/n}{4+1/n} = \dfrac{3+0}{4+0} = \dfrac{3}{4}$.

La sucesión es convergente de límite $\dfrac{3}{4}$.

**3.3.** $-1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ \ldots$

**Resolución**

$\{a_n\} = (-1)^n$. No es convergente, ya que 1 y $-1$ no son límites sino puntos de acumulación. Si se toma un entorno conveniente de 1, fuera de dicho entorno quedan infinitos términos iguales a $-1$. La sucesión es oscilante, ya que no es convergente ni tampoco divergente.

**3.4.** 1, 2, 1, 4, 1, 6, 1, 8, 1, ...

**Resolución**

Su término general:

$$\{a_n\} = \begin{cases} 1 \text{ si } n \text{ es impar} \\ \text{n si } n \text{ es par} \end{cases}$$

Es oscilante, ya que 1 no es límite. Tomando un entorno de 1, los infinitos términos pares quedan fuera de dicho entorno. Tampoco es divergente ya que, fijado $k \in \mathbb{R},\ k > 1$, los infinitos términos impares son menores que $k$.

**3.5.** Dada la sucesión 3/2, 5/4, 7/6, 9/8, 11/10, ..., hallar:

a. El término que ocupa el lugar 123.
b. Su límite.
c. El término de la sucesión a partir del cuál la diferencia con el límite es, en valor absoluto, menor que 1/100.

**Resolución**

$\{a_n\} = \dfrac{2n+1}{2n}$

a. $a_{123} = \dfrac{247}{246}$

b. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n+1}{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2+\frac{1}{n}}{2} = 1$

c. $|a_n - 1| < \dfrac{1}{100} \Longrightarrow \left|\dfrac{2n+1}{2n} - 1\right| < \dfrac{1}{100} \Longrightarrow \left|\dfrac{1}{2n}\right| < \dfrac{1}{100}$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2n} < \frac{1}{100} \Longrightarrow 2n > 100 \Longrightarrow n > 50$$

A partir de $a_{50}$, la diferencia con el límite es menor que $\dfrac{1}{100}$.

**3.6.** La sucesión $a_1 = \sqrt{3}$, $a_n = \sqrt{3 + a_{n-1}}$, ¿es convergente?. Si la respuesta es afirmativa, hallar su límite.

### Resolución

Está definida de forma recurrente (Sección 3.1). La sucesión es monótona creciente y acotada y, por tanto, convergente (Proposición 3.2). Para demostrar que es monótona creciente, se procede por inducción (Sección 1.5). Para $n = 1$:

$$a_1 = \sqrt{3} < \sqrt{3 + \sqrt{3}} = a_2$$

Se supone que la hipótesis es cierta para $n = k$: $a_k < a_{k+1}$. Se ha de demostrar para $n = k + 1$: $a_{k+1} < a_{k+2}$. En efecto:

$$a_k < a_{k+1} \Longrightarrow 3 + a_k < 3 + a_{k+1} \Longrightarrow \sqrt{3 + a_k} < \sqrt{3 + a_{k+1}} \Longrightarrow a_{k+1} < a_{k+2}$$

La sucesión está acotada. Por ejemplo, 3 es una cota superior.
Procediendo por inducción: $a_1 = \sqrt{3} < 3$. Si $a_n < 3 \Longrightarrow a_{n+1} = \sqrt{3 + a_n} < \sqrt{3 + 3} < 3$.
Por ser monótona creciente y acotada es convergente.
Su límite será:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{3 + \lim_{n\to\infty} a_{n-1}} \Longrightarrow a = \sqrt{3 + a} \Longrightarrow a^2 - a - 3 = 0 \Longrightarrow a = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$$

**3.7.** Empleando la definición de límite, demostrar que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} = 1$$

### Resolución

Recordando la definición de límite (Sección 3.2) y tomando un $\epsilon > 0$ cualquiera:

$$\left|\frac{n-1}{n} - 1\right| < \epsilon \iff \left|-\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} < \epsilon \iff n > \frac{1}{\epsilon}$$

Entonces, se verifica la definición para cualquier número natural $\delta > \frac{1}{\epsilon}$.

Por ejemplo, si $\epsilon = 0{,}1$, entonces $\delta > \frac{1}{\epsilon} = 10$. A partir de $a_{10}$, la distancia de los términos a 1 es menor que $\epsilon = 0{,}1$.

**3.8.** Hallar el límite de la sucesión:

$$\{a_n\} = \frac{1 + 2 + 3 + \cdots + n}{n^2}$$

### Resolución

El numerador es la suma de una progresión aritmética:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 + 2 + 3 + \cdots + n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1+n}{2} \cdot n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n + n^2}{2n^2} = \frac{1}{2}$$

**3.9.** Hallar el límite de la sucesión:

$$\{a_n\} = \frac{2^n - 1}{3^n + 1}$$

**Resolución**

Es una indeterminación de la forma $\dfrac{\infty}{\infty}$. Dividiendo numerador y denominador por $3^n$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\dfrac{2}{3}\right)^n - \dfrac{1}{3^n}}{1 + \dfrac{1}{3^n}} = \frac{0}{1} = 0$$

ya que $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2}{3}\right)^n = 0$, por ser $\dfrac{2}{3} < 1$.

**3.10.** Calcular el límite de la sucesión:

$$\{a_n\} = \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n - \sqrt{n}}$$

**Resolución**

Multiplicando y dividiendo por el conjugado:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n + \sqrt{n}} + \sqrt{n - \sqrt{n}}}$$

Dividiendo numerador y denominador por $\sqrt{n}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{1 + \dfrac{\sqrt{n}}{n}} + \sqrt{1 - \dfrac{\sqrt{n}}{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{1 + \sqrt{\dfrac{1}{n}}} + \sqrt{1 - \sqrt{\dfrac{1}{n}}}} = \frac{2}{1+1} = 1$$

**3.11.** Calcular el límite de la sucesión:

$$\{a_n\} = \frac{\ln(3n^2 + 6n + 1)}{\ln(4n + 2)}$$

**Resolución**

Es indeterminado de la forma $\dfrac{\infty}{\infty}$. Sacando factor común:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left[n^2\left(3 + \dfrac{6}{n} + \dfrac{1}{n^2}\right)\right]}{\ln\left[n\left(4 + \dfrac{2}{n}\right)\right]} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\ln n + ln\left(3 + \dfrac{6}{n} + \dfrac{1}{n^2}\right)}{\ln n + \ln\left(4 + \dfrac{2}{n}\right)}$$

Dividiendo numerador y denominador por $\ln n$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2 + \dfrac{\ln\left(3 + \dfrac{6}{n} + \dfrac{1}{n^2}\right)}{\ln n}}{1 + \dfrac{\ln\left(4 + \dfrac{2}{n}\right)}{\ln n}} = \frac{2 + \dfrac{\ln 3}{\infty}}{1 + \dfrac{\ln 4}{\infty}} = \frac{2+0}{1+0} = 2$$

**3.12.** Calcular el límite de la sucesión:

$$\{a_n\} = \frac{n!}{1! + 2! + 3! + \cdots + n!}$$

**Resolución**

Mediante el criterio de Stolz (Sección 3.8):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n! - (n-1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \dfrac{(n-1)!}{n!}}{1} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1$$

**3.13.** Calcular:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n}}{\ln n}$$

**Resolución**

Aplicando el criterio de Stolz (Sección 3.8):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1}{n}}{\ln n - \ln(n-1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n \cdot \ln\left(\dfrac{n}{n-1}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln\left(1 + \dfrac{1}{n-1}\right)^n} = \frac{1}{\ln e} = 1$$

**3.14.** Hallar el límite de la sucesión:

$$\{a_n\} = \sqrt[n]{n}$$

**Resolución**

Mediante el criterio del cociente-raíz (Sección 3.8):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

**3.15.** Hallar el límite de la sucesión $\{a_n\} = \dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}$.

**Resolución**

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}}$$

Aplicando el criterio del cociente-raíz (Sección 3.8):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{n^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$$

**3.16.** Hallar el límite de la sucesión $\{a_n\} = \dfrac{n^n}{n! \cdot e^n}$.

**Resolución**

Aplicando la fórmula de Stirling (Sección 3.8):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{n! \cdot e^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{\sqrt{2\pi n} \cdot n^n \cdot e^{-n} \cdot e^n} = \lim_{n\to\infty} = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} = 0$$

**3.17.** Hallar el límite de la sucesión:

$$\{a_n\} = \sqrt[-n]{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n^2+1}}$$

**Resolución**

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{\frac{n^2+1}{n}} = 1^\infty$$

Es una indeterminación del tipo del número $e$. Se resuelve mediante la fórmula (Sección 3.10):

$$\lim_{n\to\infty} a_n{}^{b_n} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - 1).b_n}$$

Por tanto:

$$e^{\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n+2}{n+1} - 1\right) \cdot \frac{n^2+1}{n}} = e$$

**3.18.** Hallar el límite de la sucesión:

$$\{a_n\} = \frac{\ln n!}{\ln n^n}$$

**Resolución**

Aplicando el criterio de Stolz (Sección 3.8):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n! - \ln(n-1)!}{\ln n^n - \ln(n-1)^{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\ln \dfrac{n^n}{(n-1)^{n-1}}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\ln\left[\left(\dfrac{n}{n-1}\right)^{n-1} \cdot n\right]} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\ln\left(1 + \dfrac{1}{n-1}\right)^{n-1} + \ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\ln e + \ln n} = 1$$

Otra forma de hacerlo sería utilizando la fórmula de Stirling.

**3.19.** Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n^2]{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n}$.

**Resolución**

Mediante el criterio de la media geométrica (Sección 3.8):

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2n} = \lim_{n\to\infty} 2^{\frac{1}{n}} \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 2^o \cdot 1 = 1 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n^2]{2\cdot 4\cdot 6 \ldots 2n} = 1$$

(Ver Problema 3.14: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.)

**3.20.** Calcular $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1+16+\cdots+n^4}{n^4}\right)$.

**Resolución**

Haciendo $\lim_{n\to\infty} \frac{1+16+\cdots+n^4}{n^5}$ y aplicando el criterio de Stolz (Sección 3.8):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^4}{n^5-(n-1)^5} = \frac{1}{5}.$$

**3.21.** Calcular $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+2}\right)^{\frac{2}{n}}$.

**Resolución**

Tomando logaritmos naturales:

$$\ln A = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} \cdot \ln \frac{1}{n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{-2\cdot \ln(n+2)}{n}$$

Aplicando el criterio de Stolz (Sección 3.8):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-2\cdot\ln(n+2)+2\cdot\ln(n+1)}{n-(n-1)} = \lim_{n\to\infty} 2\cdot \ln\left(\frac{n+1}{n+2}\right) = 0$$

Por tanto, $A = e^0 = 1$.

**3.22.** Calcular $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}\right)$.

**Resolución**

$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$. Por tanto:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$$

**3.23.** Hallar el límite de la sucesión $\sqrt{2}$, $\sqrt{2\sqrt{2}}$, $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \ldots$

**Resolución**

El término general es $a_n = \sqrt{2 \cdot a_{n-1}}$, $n \geq 2$, siendo $a_1 = \sqrt{2}$. Si $n \to \infty$, se tiene:

$$a = \sqrt{2a}$$

siendo $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Elevando al cuadrado, $a^2 = 2a$, que tiene soluciones iguales a 0 y 2. Evidentemente, $a = 2$.

Otra forma de hacerlo sería:

$$a = 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots} = 2^{\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}} = 2$$

ya que el exponente es la suma de los infinitos términos de una progresión geométrica decreciente:

$$S = \frac{a_1}{1-r}$$

**3.24.** Demostrar que la sucesión 0,9, 0,99, 0,999, ... es de Cauchy. ¿Cuál es su límite?

**Resolución**

$\{a_n\} = 1 - \dfrac{1}{10^n}$. Tomando $p = q + n$:

$$|a_p - a_q| = |a_{q+n} - a_q| = \left|1 - \frac{1}{10^{q+n}} - 1 + \frac{1}{10^q}\right| = \left|\frac{1}{10^q} - \frac{1}{10^{q+n}}\right|$$
$$= \left|\frac{10^n - 1}{10^{q+n}}\right| = \left|\frac{1}{10^q} \cdot \frac{10^n - 1}{10^n}\right| < \frac{1}{10^q} < \epsilon$$

ya que $\left|\dfrac{10^n - 1}{10^n}\right| < 1$.

Despejando, $q > \dfrac{-\ln\epsilon}{\ln 10} = -\log\epsilon$. Por tanto, $\delta = -\log\epsilon$.

Por ejemplo, si $\epsilon = 10^{-5}$, $\delta = -\log 10^{-5} = 5$. A partir de $a_5$, la distancia entre dos términos cualesquiera es menor que $\epsilon = 10^{-5}$.

# PROBLEMAS PROPUESTOS

Hallar el término general, el límite (si lo tienen), y clasificar las siguientes sucesiones:

**3.25.** $\dfrac{5}{7}, \dfrac{12}{10}, \dfrac{19}{13}, \dfrac{26}{16}, \ldots$

**3.26.** $1, \dfrac{-1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{-1}{4}, \dfrac{1}{5}, \dfrac{-1}{6}, \ldots$

**3.27.** Dada la sucesión $6, \dfrac{9}{2}, \dfrac{14}{3}, \dfrac{21}{4}, \dfrac{30}{5}, \ldots$, hallar:

a) Su término general.
b) El término que ocupa el lugar 72.
c) El lugar que ocupa el término igual a $\dfrac{21}{2}$.
d) Su límite, si existe.

**3.28.** Encontrar ejemplos de sucesiones tales que:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$$

y que cumplan: a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$; b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$; c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$.

**3.29.** Demostrar que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 0$.

**3.30.** Hallar el límite de la sucesión definida mediante la fórmula recurrente $a_n = \sqrt{3 \cdot a_{n-1}}$.

**3.31.** Demostrar que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{r^n} = 0$, si $r > 1$. ¿Es cero el límite si $r < 1$?

**3.32.** Calcular $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n + \operatorname{sen} n}$.

**3.33.** Calcular $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(3n^2+1)}{\ln n}$.

**3.34.** Calcular $\displaystyle\lim_{n\to\infty} e^{-n} \operatorname{sen} n$.

**3.35.** Calcular $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (1+2n^3)^{\frac{1}{1+3\ln n}}$.

**3.36.** Calcular $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n(2n - \sqrt{n^2+2})$.

**3.37.** Calcular $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\ln(2n+1)}{2n+3}\right)^{\frac{n^2+1}{n+1}}$.

**3.38.** Calcular $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

**3.39.** Calcular $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1^a + 2^a + \cdots + n^a}{n^{a+1}}$.

**3.40.** Calcular $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n}$.

**3.41.** Calcular $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n \cdot (\sqrt[n]{a} - 1)$.

**3.42.** Calcular $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a^{\frac{1}{n}} + a^{\frac{2}{n}} + a^{\frac{3}{n}} + \cdots + a^{\frac{n}{n}}}{n}$, con $a > 0$.

**3.43.** Calcular $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}\right)^n$.

**3.44.** Calcular $\sqrt{3}$, $\sqrt{\sqrt{3}}$, $\sqrt{\sqrt{\sqrt{3}}}$, ...

**EJEMPLO 4.2** Sea la serie $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\dots$, donde $a_n=\frac{1}{n(n+1)}$. Haciendo una descomposición en fracciones simples:

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

con lo que:

$$A_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\dots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$$

**EJEMPLO 4.3** Dada la serie $1+2+2^2+2^3+\dots$, es evidente que $a_n=2^{n-1}$, y la suma parcial $n$-ésima es la de una progresión geométrica:

$$A_n=\frac{2^n-1}{2-1}=2^n-1$$

## 4.2. SERIES CONVERGENTES

● DEFINICIÓN 4.2 *Se dice que la serie* $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ *es convergente si existe el límite finito* $\lim_{n\to\infty}A_n=A$.

Al número $A$ se le llama *suma* de la serie.

**EJEMPLO 4.4** En la serie $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\dots$ de un ejemplo anterior:

$$\lim_{n\to\infty}A_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$$

## 4.3. SERIES DIVERGENTES

● DEFINICIÓN 4.3 *Se dice que la serie* $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ *es divergente si la sucesión* $A_1, A_2, \dots, A_n$ *es divergente.*

**EJEMPLO 4.5** La serie $1+2+2^2+2^3+\dots$ es divergente, ya que:

$$\lim_{n\to\infty}(2^n-1)=\infty$$

● DEFINICIÓN 4.4 *A una serie que no es ni convergente ni divergente se le llama oscilante.*

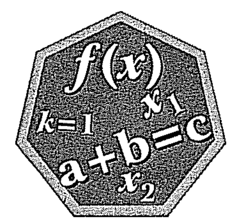
**EJEMPLO 4.6** La serie $a-a+a-a+a-a+\dots$ es oscilante.

## 4.4. CRITERIO GENERAL DE CONVERGENCIA

■ PROPOSICIÓN 4.1 *La condición necesaria para la convergencia de una serie es que* $\lim_{n\to\infty}a_n=0$.

DEMOSTRACIÓN. Como $a_n=A_n-A_{n-1}$ y $\lim_{n\to\infty}A_n=\lim_{n\to\infty}A_{n-1}=A$, se tiene:

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}A_n-\lim_{n\to\infty}A_{n-1}=A-A=0\ ■$$




CAPÍTULO

# SERIES NUMÉRICAS




En este capítulo se introducirá el concepto de serie numérica. Dicho concepto surge al estudiar la suma de los términos de una sucesión indefinida. Además de la suma de una serie, es del mayor interés el estudio de su convergencia, como ocurre con las sucesiones.

## 4.1. CONCEPTO DE SERIE

● DEFINICIÓN 4.1 *Dada la sucesión $\{a_n\}$, cuyos términos pertenecen a $\mathbb{R}$, se forma la sucesión $\{A_n\}$, cuyos términos son las sumas parciales:*

$$\begin{aligned} A_1 &= a_1 \\ A_2 &= a_1 + a_2 \\ A_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

*esto es:*

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

*Al par ordenado de sucesiones $(\{a_n\}, \{A_n\})$ se le llama serie numérica y se representa $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$. En la práctica, se suelen omitir las llaves: $(a_n, A_n)$.*

Basta con tener una de las dos, $a_n$ o $A_n$, para obtener la otra, ya que $a_n = A_n - A_{n-1}$.

**EJEMPLO 4.1** De la sucesión $a_n = n$ se obtiene:

$$\begin{aligned} A_1 &= 1 \\ A_2 &= 1 + 2 = 3 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_n &= 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

Dicho de otro modo, la condición necesaria pero no suficiente para que una serie sea convergente es que su término $n$-ésimo tienda a cero. Por ser condición necesaria y no suficiente, permite decidir los casos de no convergencia pero no los de convergencia. Es fácil obtener series no convergentes cuyo término general tienda a cero. Por ejemplo, la llamada serie *armónica* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (Sección 4.5).

## 4.5. SERIE ARMÓNICA

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$, llamada *armónica*, es convergente si $\alpha > 1$ y, divergente si $\alpha \leq 1$.

## 4.6. SERIE GEOMÉTRICA

● DEFINICIÓN 4.5 *Se llama serie geométrica a aquélla cuyos términos son la suma de una progresión geométrica:* $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots$

■ PROPOSICIÓN 4.2 *Sea la serie geométrica* $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$*, en la que $r$ es un número real.*

- *Si $|r| < 1$, la serie es convergente y su suma es* $A = \frac{a}{1-r}$.
- *Si $|r| > 1$, la serie es divergente.*
- *Si $r = 1$, es divergente.*
- *Si $r = -1$, es oscilante.*

## 4.7. SERIES DE TÉRMINOS POSITIVOS

● DEFINICIÓN 4.6 *Se dice que la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *es de términos positivos, si $a_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Estas series pueden ser convergentes o divergentes, pero en ningún caso oscilantes.

Por otra parte, las series de términos negativos se tratan del mismo modo que éstas, sin más que cambiar de signo.

■ PROPOSICIÓN 4.3 *La serie de términos positivos* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *es convergente si y sólo si la sucesión de sumas parciales $A_n$ está acotada.*

DEMOSTRACIÓN. La sucesión $A_n$ es creciente, ya que $a_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por estar acotada superiormente, es convergente, según un teorema anterior (Sección 3.2). Recíprocamente, por ser convergente, está acotada. ■

### CRITERIO DE COMPARACIÓN (I)

Sea $0 \leq a_n \leq b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

Análogamente, si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente, también lo es $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

DEMOSTRACIÓN. Sean $A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ y $B_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$. Se tiene que $0 \leq A_n \leq B_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por la proposición anterior, $B_n$ está acotada por ser $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ convergente. Por lo tanto, también está acotada $A_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, por la proposición anterior.

Del mismo modo, si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge, la sucesión $A_n$ no está acotada. Como $0 \leq A_n \leq B_n$, tampoco lo está $B_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge. ■

**EJEMPLO 4.7** Sea la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n}$. Como $\frac{3}{n} > \frac{1}{n}$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ es divergente (serie armónica, Sección 4.5), también lo es la serie propuesta.

## CRITERIO DE COMPARACIÓN (II)

Si $a_n > 0$ y $b_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = r$, entonces:

- Si $r \neq 0$, las series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ tienen el mismo carácter.
- Si $r = 0$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge.
- Si $r = \infty$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.
- Si $r = \infty$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge.

**EJEMPLO 4.8** La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$ converge, ya que dividiendo por la serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (convergente, Sección 4.5), el límite es igual a 1.

## CRITERIO DE LA RAÍZ DE CAUCHY

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de términos no negativos, tal que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = r$.:

- Si $r < 1$, la serie converge.
- Si $r > 1$, la serie diverge.
- Si $r = 1$, se trata de un caso dudoso.

**EJEMPLO 4.9** La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2^n}$ es convergente, ya que:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{5}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{5}}{2} = \frac{1}{2} < 1$$

## CRITERIO DE D'ALEMBERT O DEL COCIENTE

Si $a_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = r$, la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$:

- Si $r < 1$, converge.
- Si $r > 1$, diverge.
- Si $r = 1$, es un caso dudoso.

**EJEMPLO 4.10** La serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^3}{(n+1)!}$ converge, ya que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^3}{(n+2)\cdot n^3} = 0 < 1$.

## CRITERIO DE RAABE-DUHAMEL

Si $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, y $\lim\limits_{n\to\infty} n.\left(1 - \dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right) = r$, la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$:

- Si $r > 1$, converge.
- Si $r < 1$, diverge.
- Si $r = 1$, es un caso dudoso.

**EJEMPLO 4.11** La serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$ converge, ya que:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{3n}{n+3} = 3 > 1$$

## CRITERIO DEL LOGARITMO DE CAUCHY

Si $a_n > 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, y $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln\left(\frac{1}{a_n}\right)}{\ln\ n} = r$, la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$:

- Si $r > 1$, converge.
- Si $r < 1$, diverge.
- Si $r = 1$, es un caso dudoso.

**EJEMPLO 4.12** La serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^3 \cdot 5^{\ln\ n}}$ converge, ya que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n^3 \cdot 5^{\ln n})}{\ln n} = 3 + \ln 5 > 1$$

## CRITERIO DE PRINGSHEIM

Si $a_n > 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, y $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\alpha} a_n = r$, con $\alpha, r \in \mathbb{R}$, la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$:

- Si $r$ es finito y $\alpha > 1$, converge.
- Si $r \neq 0$ y $\alpha \leq 1$, diverge.

**Ejemplo 4.13** La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+2n+1}{n^3+5n}$ diverge, ya que:

$$\lim_{n\to\infty} n\,\frac{3n^2+2n+1}{n^3+5n} = 3 \neq 0, \text{ con } \alpha = 1$$

### CRITERIO DE LA INTEGRAL

Sea $f(x)$ una función positiva decreciente, definida para todo $x \geq 1$, y tal que $f(n) = a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si y sólo si existe:

$$\int_1^{\infty} f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_1^n f(x)dx$$

**Ejemplo 4.14** La serie $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2}$ converge, ya que $f(x) = xe^{-x^2}$ es positiva y decreciente para $x \geq 1$, y existe el límite:

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^n xe^{-x^2}dx = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{-e^{-x^2}}{2}\right]_1^n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{-1}{2e^{n^2}} + \frac{1}{2e}\right) = \frac{1}{2e}$$

## 4.8. SUMA DE UNA SERIE

Dada la sucesión de sumas parciales $A_1 = a_1$, $A_2 = a_1 + a_2, \ldots, A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, si existe un número real $A$, tal que:

$$\lim_{n\to\infty} A_n = A$$

se dice que la serie es convergente de suma igual a $A$.

A continuación, se van a sumar algunas series notables.

### SERIE GEOMÉTRICA

Es de la forma $\sum_{n=1}^{\infty} ar^n$, con $|r| < 1$, y su suma es $A = \frac{a}{1-r}$.

**Ejemplo 4.15** La suma de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} 3\left(\frac{1}{2}\right)^n$ es $\frac{3}{1-\frac{1}{2}} = 6$.

### SERIE COCIENTE DE DOS POLINOMIOS

Para hallar su suma, la serie se descompone en fracciones simples y se eliminan términos.

**Ejemplo 4.16** Hallar la suma de la serie $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots$

Se descompone en fracciones simples $a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, con lo que:

$$A_n = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \cdots - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

La suma $A = \lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$.

### SERIE HIPERGEOMÉTRICA

Es aquélla que verifica:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\alpha n + \beta}{\alpha n + \gamma}$$

con $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Su suma es:

$$A = \frac{\gamma a_1}{\gamma - \alpha - \beta}$$

**EJEMPLO 4.17** Sea $\frac{2}{4\cdot 5} + \frac{2\cdot 3}{4\cdot 5\cdot 6} + \frac{2\cdot 3\cdot 4}{4\cdot 5\cdot 6\cdot 7} + \cdots + \frac{2\cdot 3\cdot 4\ \ldots\ (n+1)}{4\cdot 5\cdot 6\ \ldots\ (n+4)} + \ldots$

Abreviadamente, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{(n+4)!}}{3!}$.

Es hipergeométrica, ya que $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+2}{n+5}$, con $\alpha = 1$, $\beta = 2$ y $\gamma = 5$.

Su suma: $A = \frac{5\cdot\left(\frac{2}{4\cdot 5}\right)}{5-1-2} = \frac{1}{4}$.

### SERIE ARITMÉTICO-GEOMÉTRICA

Es de la forma $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n}$, donde $a_n$ es una progresión aritmética de diferencia $d$, y $b_n$, una progresión geométrica de razón $r$. Su suma es igual a:

$$A = \frac{r}{b_1(r-1)}\left(a_1 + \frac{d}{r-1}\right)$$

**EJEMPLO 4.18** La suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n-1}{2^n}$ es $A = \frac{2}{2(2-1)}\left(3 + \frac{4}{2-1}\right) = 7$.

### SERIE DEL TIPO DEL NÚMERO $e$

Es de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$, $a \in \mathbb{R}$. Su suma es $A = e^a$.

## 4.9. CONVERGENCIA DE SERIES ALTERNADAS

Una serie es alternada si sus términos son alternativamente positivos y negativos.

### CRITERIO DE LEIBNITZ

Si $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots \geq 0$ y $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - \cdots + (-1)^{n+1}a_n + \ldots$ converge.

Además, en las anteriores condiciones, las sumas parciales $A_n$ de orden impar son valores aproximados por exceso de la suma $A$ de la serie, y las sumas pares son aproximaciones de $A$ por defecto. Por otra parte, el error cometido no supera el primer término omitido en dicha suma. Esto es:

$$0 \leq (-1)^n \cdot (A - A_n) \leq a_{n+1}$$

para todo $n \geq 1$.

**EJEMPLO 4.19** La serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ es convergente, ya que $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots$ y $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

**EJEMPLO 4.20** La serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\ln n}{n}$ es convergente, ya que $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ es decreciente. En efecto:

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} < 0, \text{ para } x > e$$

Además, $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$.

**EJEMPLO 4.21** La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(3n+1)(2n+3)}$ es convergente, pues:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(3n+1)(2n+3)} = 0$$

y es decreciente:

$$a_{n+1} = \frac{1}{[3(n+1)+1][2(n+1)+3]} < \frac{1}{(3n+1)(2n+3)} = a_n$$

Como $a_4 = \frac{1}{13 \cdot 11} < 10^{-2}$, se tiene que $(-1)^4(A - A_3) \leq a_4 < 10^{-2} \Longrightarrow A \approx A_3$, con un error menor que $10^{-2}$. El valor de $A_3$:

$$A_3 = \frac{1}{20} - \frac{1}{49} + \frac{1}{90} = 0{,}04$$

Por tanto, $A = 0{,}04$, con un error menor que $10^{-2}$.

## 4.10. SUMA DE DOS SERIES

● DEFINICIÓN 4.7 *Se define el producto de un número real k por la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *como la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} ka_n$.

■ PROPOSICIÓN 4.4 *Si la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge a A, la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} ka_n$ *converge a kA.*

DEMOSTRACIÓN. Inmediata, ya que las sumas parciales de $\sum_{n=1}^{\infty} ka_n$ son $kA_n$, de límite $kA$. ■

● DEFINICIÓN 4.8 *Se define la suma de las series* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *y* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *como la serie* $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$.

■ PROPOSICIÓN 4.5 *Si las series* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *y* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *convergen a* $A$ *y a* $B$*, respectivamente, la suma* $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ *converge a* $A + B$.

DEMOSTRACIÓN. Inmediata. Las sumas parciales de $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ son $A_n + B_n$, de límite $A + B$. ■

# PROBLEMAS RESUELTOS

En los siguientes ejercicios, estudiar la convergencia de las series.

**4.1.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n\,a^n},\ a > 0.$

**Resolución**

Aplicando el criterio de D'Alembert (Sección 4.7):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{(n+1)^2+1}{(n+1)a^{n+1}}}{\dfrac{n^2+1}{na^n}} = \frac{1}{a}$$

- Si $a > 1$, converge.
- Si $a < 1$, diverge.
- Si $a = 1$, diverge, ya que el límite del término general es distinto de cero (Sección 4.4):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n} = \infty \neq 0$$

**4.2.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n+1)!}.$

**Resolución**

Aplicando el criterio de D'Alembert (Sección 4.7):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2(n+2)} = 0 < 1. \text{ Convergente.}$$

**4.3.** $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{n^2-1}.$

**Resolución**

Comparando con la serie armónica (Sección 4.5):

$$\frac{n}{n^2-1} > \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}. \text{ Divergente.}$$

**4.4.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)}$.

**Resolución**

Aplicando el criterio de Pringsheim ($\alpha = 1$) (Sección 4.7):

$$\lim_{n\to\infty} n\,\frac{n}{(n+1)(n+2)} = 1. \text{ Divergente.}$$

**4.5.** $\displaystyle\sum_{n=4}^{\infty} \frac{n(n+1)}{(n-2)(n-3)}$.

**Resolución**

No converge, ya que $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ (criterio general de convergencia, Sección 4.4).

**4.6.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n-5}\right)^n$.

**Resolución**

Aplicando el criterio de la raíz de Cauchy (Sección 4.7):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{3n-5} = \frac{1}{3} < 1. \text{ Convergente.}$$

**4.7.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^4-3}$.

**Resolución**

Aplicando el criterio de Pringsheim (Sección 4.7);

$$\lim_{n\to\infty} n^3 \cdot \frac{n}{n^4-3} = 1 \neq \infty$$

Como $\alpha = 3$, la serie converge. También se podría hacer mediante el criterio de Raabe (Sección 4.7).

**4.8.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{3+n^{\frac{3}{2}}}$.

**Resolución**

Mediante el criterio de Pringsheim (Sección 4.7):

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{n+1}{3+n^{\frac{3}{2}}} = 1 \neq 0$$

Como $\alpha = \dfrac{1}{2}$, la serie diverge.

**4.9.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{2n-1}-\sqrt{n})$.

**Resolución**

El límite de $a_n$ es igual a;

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{2n-1}-\sqrt{n}) = \lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{n}} = \infty \neq 0$$

Por tanto, la serie diverge (Sección 4.4).

**4.10.** Analizar si son falsas o ciertas las afirmaciones siguientes:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ no convergente $\Longrightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ convergente.

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergente, $a_n \neq 0 \Longrightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a_n}$ convergente.

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergente, $a_n \neq 0 \Longrightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n}a_n$ convergente.

**Resolución**

a) Falsa, ya que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ es divergente (serie armónica, Sección 4.5) y la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n$ también lo es.

b) Falsa, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ es convergente (serie armónica, Sección 4.5) y $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a_n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^2+1}$ no es convergente, ya que su límite es $1 \neq 0$ (Sección 4.4).

c) Cierta, ya que el límite del cociente de ambas es: $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\frac{n+1}{n}\cdot a_n} = 1$ y ambas han de tener el mismo carácter [criterio de comparación (II), Sección 4.7].

**4.11.** Estudiar el carácter de la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^k}{(n-1)!}$.

**Resolución**

Mediante el criterio de D'Alembert (Sección 4.7):

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{(n+1)^k}{n!}}{\dfrac{n^k}{(n-1)!}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^k}{n^{k+1}} = 0 < 1. \text{ Convergente.}$$

**4.12.** Estudiar el carácter de la serie $\sum_{n=2}^{\infty}\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^n+\frac{2n}{n-1}\right]^{-n}$.

**Resolución**

Aplicando el criterio de la raíz de Cauchy (Sección 4.7):

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^n+\frac{2n}{n-1}\right]^{-1}=\frac{1}{e+2}<1. \text{ Convergente.}$$

**4.13.** Estudiar el carácter de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)\cdot n!}{4^n}$.

**Resolución**

Mediante el criterio de D'Alembert (Sección 4.7):

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+2)(n+1)!}{4^{n+1}}}{\frac{(n+1)\cdot n!}{4^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)}{4}=\infty. \text{ Divergente.}$$

**4.14.** Estudiar el carácter de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n^2}}{(n+1)^{n^2}}$.

**Resolución**

Mediante el criterio de la raíz de Cauchy (Sección 4.7):

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=e^{-1}<1. \text{ Convergente.}$$

**4.15.** Estudiar el carácter de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

**Resolución**

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e\neq 0. \text{ Divergente (crit. gen. conv.).}$$

**4.16.** Estudiar el carácter de la serie $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n+3}{n-1}$.

**Resolución**

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+3}{n-1}=1\neq 0. \text{ Divergente (crit. gen. conv.).}$$

**4.17.** Estudiar el carácter de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln 2)^n}$.

**Resolución**

Mediante el criterio de la raíz de Cauchy (Sección 4.7):

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln 2} > 1. \text{ Divergente.}$$

**4.18.** Estudiar el carácter de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! \cdot 2^n}{n^n}$.

**Resolución**

Utilizando el criterio de D'Alembert (Sección 4.7):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{(n+1)! \cdot 2^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{n! \cdot 2^n}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^n}{(n+1)^n} = \frac{2}{e} < 1. \text{ Converge.}$$

**4.19.** Estudiar el carácter de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cdot 7 \cdot 10 \ldots (3n+1)}{2 \cdot 6 \cdot 10 \ldots (4n-2)}$.

**Resolución**

Mediante el criterio de D'Alembert (Sección 4.7):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{4 \cdot 7 \cdot 10 \ldots (3n+4)}{2 \cdot 6 \cdot 10 \ldots (4n+2)}}{\dfrac{4 \cdot 7 \cdot 10 \ldots (3n+1)}{2 \cdot 6 \cdot 10 \ldots (4n-2)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n+4}{4n+2} = \frac{3}{4} < 1. \text{ Convergente.}$$

**4.20.** Estudiar el carácter de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)^3}$.

**Resolución**

Comparando con la serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (Sección 4.5):

$$\frac{n}{(n+1)^3} < \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2} \text{ [Crit. de comp. (I)]}$$

Es convergente, puesto que $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge.

**4.21.** Estudiar el carácter de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n+1)!}$.

**Resolución**

Utilizando el criterio de D'Alembert (Sección 4.7):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{(n+1)^2}{(n+2)!}}{\dfrac{n^2}{(n+1)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{(n+2)\cdot n^2} = 0 < 1. \text{ Convergente.}$$

**4.22.** Estudiar el carácter de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{3^n}$.

**Resolución**

Comparando con la serie geométrica (Sección 4.6):

$$\frac{\cos^2 n}{3^n} \leq \frac{1}{3^n}$$

puesto que $\cos^2 n \leq 1$.

Es convergente, por serlo $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$, ya que $\frac{1}{3} < 1$.

**4.23.** Estudiar el carácter de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^n \cdot n!}$.

**Resolución**

Mediante el criterio de D'Alembert (Sección 4.7):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{(n+1)^{n+1}}{3^{n+1}\cdot(n+1)!}}{\dfrac{n^n}{3^n\cdot n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{3n^n} = \frac{e}{3} < 1. \text{ Convergente.}$$

**4.24.** Estudiar el carácter de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$.

**Resolución**

Utilizando el criterio de D'Alembert (Sección 4.7):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{n^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e > 1. \text{ Divergente.}$$

**4.25.** Estudiar el carácter de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+2n}}$.

**Resolución**

Comparando con la serie armónica (Sección 4.5):

$$\frac{1}{\sqrt{n^3+2n}} < \frac{1}{\sqrt{n^3}} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

como la serie armónica es convergente, también lo es la serie propuesta [criterio de comparación (I), Sección 4.7].

**4.26.** Estudiar el carácter de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$.

**Resolución**

Mediante el criterio de la raíz de Cauchy (Sección 4.7):

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1. \text{ Convergente.}$$

**4.27.** Estudiar el carácter de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1000^n}{n!}$.

**Resolución**

Utilizando el criterio de D'Alembert (Sección 4.7):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1000^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{1000^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1000}{n+1} = 0 < 1. \text{ Convergente.}$$

**4.28.** Estudiar el carácter de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$.

**Resolución**

Mediante el criterio de D'Alembert (Sección 4.7):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{((n+1)!)^2}{(2(n+1))!}}{\frac{(n!)^2}{(2n)!}} = \frac{1}{4} < 1. \text{ Convergente.}$$

**4.29.** Sumar la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

**Resolución**

$A_n = \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \dots$

Se trata de una serie geométrica (Sección 4.6). Su suma:

$$A = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$

**4.30.** Sumar la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+2)}$.

**Resolución**

Haciendo una descomposición en fracciones simples:

$$\frac{2}{n(n+2)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}$$

La suma parcial $A_n$:

$$A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)$$
$$= 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = \frac{n(3n+5)}{2(n+1)(n+2)}$$

La suma $A = \lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n(3n+5)}{2(n+1)(n+2)} = \frac{3}{2}$.

Es una serie convergente de suma igual a $\frac{3}{2}$.

**4.31.** Sumar la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)}$.

**Resolución**

Procediendo como en el ejercicio anterior:

$$A_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{n+3} \Longrightarrow A = \lim_{n\to\infty} A_n = \frac{1}{3}$$

Otra forma de hacerlo sería considerando que es una serie hipergeométrica (Sección 4.8).

**4.32.** Sumar la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+12}{n^3+5n^2+6n}$.

**Resolución**

Descomponiendo en fracciones simples:

$$\frac{n+12}{n^3+5n^2+6n} = \frac{2}{n} - \frac{5}{n+2} + \frac{3}{n+3}$$

Llamando $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$, se tiene:

$$A_n = 2H_n - 5H_n + 3H_n + 5 \cdot 1 + 5 \cdot \frac{1}{2} - 3 \cdot 1 - 3 \cdot \frac{1}{2} - 3 \cdot \frac{1}{3} = 2$$

**4.33.** Estudiar el carácter de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \binom{n+3}{3}^{-1}$.

### Resolución

$$\sum_{n=1}^{\infty} \binom{n+3}{3}^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{(n+3)(n+2)(n+1)}$$

Descomponiendo en fracciones simples:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{n+1} - \frac{6}{n+2} + \frac{3}{n+3}\right)$$

Procediendo como en el problema anterior:

$$A_n = 3H_n - 6H_n + 3H_n - 3 + 6 + 6 \cdot \frac{1}{2} - 3 - 3 \cdot \frac{1}{2} - 3 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$

**4.34.** Idem $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{7^n}$.

### Resolución

Se trata de una serie aritmético-geométrica (Sección 4.8), ya que el numerador es una progresión aritmética de diferencia 2, y el denominador es una progresión geométrica de razón 7. Su suma será:

$$A = \frac{7}{7(7-1)} \cdot \left(3 + \frac{2}{7-1}\right) = \frac{1}{6} \cdot \left(3 + \frac{1}{3}\right) = \frac{5}{9}$$

**4.35.** Hallar la suma parcial $A_n$ de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n+1}{n}$, y demostrar que es divergente.

### Resolución

$$\begin{aligned} A_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n &= (\ln 2 - \ln 1) + \dots + [\ln(n+1) - \ln n] \\ &= \ln(n+1) - \ln 1 = \ln(n+1) \end{aligned}$$

Por tanto: $\lim_{n \to \infty} A_n = \lim_{n \to \infty} \ln(n+1) = \infty$. Divergente.

**4.36.** Sumar la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{(n+4)(n+5)}$.

**Resolución**

Descomponiendo en fracciones simples:

$$\frac{7}{(n+4)(n+5)} = 7 \cdot \left(\frac{1}{n+4} - \frac{1}{n+5}\right)$$

La suma parcial $A_n$:

$$A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \left(\frac{7}{5} - \frac{7}{6}\right) + \left(\frac{7}{6} - \frac{7}{7}\right) + \cdots + \left(\frac{7}{n+4} - \frac{7}{n+5}\right)$$
$$= \frac{7}{5} - \frac{7}{n+5}$$
$$\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{7}{5} - \frac{7}{n+5}\right) = \frac{7}{5}$$

La suma de la serie es igual a $\frac{7}{5}$.

**4.37.** Sumar la serie $\frac{5}{2} + \frac{8}{4} + \frac{11}{8} + \frac{14}{16} + \dots$

**Resolución**

Es una serie aritmético-geométrica (Sección 4.8), con $d = 3$, $r = 2$, $a_1 = 5$ y $b_1 = 2$. Su suma:

$$A = \frac{r}{b_1(r-1)} \cdot \left(a_1 + \frac{d}{r-1}\right) = \frac{2}{2(2-1)} \cdot \left(5 + \frac{3}{2-1}\right) = 8$$

**4.38.** Sumar la serie $\frac{2}{4} + \frac{2\cdot 3}{4\cdot 5} + \frac{2\cdot 3\cdot 4}{4\cdot 5\cdot 6} + \frac{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{4\cdot 5\cdot 6\cdot 7} + \dots$

**Resolución**

Es una serie hipergeométrica (Sección 4.8), ya que:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+2}{n+4}$$

siendo $\alpha = 1$, $\beta = 2$ y $\gamma = 4$. Su suma: $A = \frac{\gamma a_1}{\gamma - \alpha - \beta} = \frac{4 \cdot \frac{2}{4}}{4 - 1 - 2} = 2.$

**4.39.** Sumar la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$.

**Resolución**

$$\ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \ln\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right) = \ln\frac{(n+1)(n-1)}{n^2}$$

Por tanto:

$$A_n = \ln\frac{3\cdot 1}{2^2} + \ln\frac{4\cdot 2}{3^2} + \ln\frac{5\cdot 3}{4^2} + \cdots + \ln\frac{(n+1)(n-1)}{n^2}$$
$$= \ln 3 + \ln 1 - 2\cdot\ln 2 + \ln 4 + \ln 2 - 2\cdot\ln 3 + \ln 5 + \ln 3 - 2\cdot\ln 4 + \cdots + \ln(n+1)$$
$$+ \ln(n-1) - 2\cdot\ln n$$
$$= -\ln 2 + \ln(n+1) - \ln n = -\ln 2 + \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

Su suma es $A = \lim_{n\to\infty} \left[ -\ln 2 + \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)\right] = -\ln 2.$

**4.40.** Demostrar que la serie alternada:

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{2n-1} + \ldots$$

es convergente y averiguar el número de términos preciso para calcular su suma con un error menor que 0,001.

**Resolución**

Se utiliza el criterio de Leibnitz (Sección 4.9). Para ello, es preciso verificar que la sucesión de término general $a_n = \dfrac{1}{2n-1}$ es decreciente.

En efecto:

$$a_{n+1} = \frac{1}{2(n+1)-1} = \frac{1}{2n+1} < \frac{1}{2n-1} = a_n$$

Por otra parte:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n-1} = 0$$

Por tanto, la serie converge. Además:

$$a_{n+1} = \frac{1}{2(n+1)-1} < 0{,}001 \Longrightarrow n = 499{,}5$$

Habrá que tomar 500 términos para obtener la suma de la serie con un error menor que 0,001.

**4.41.** Dada la serie $-1 + \dfrac{1}{2!} - \dfrac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \cdot \dfrac{1}{n!} + \ldots$, demostrar que es convergente y hallar su suma con un error menor que 0,01.

**Resolución**

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n!} = 0; \qquad a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} < \frac{1}{n!} = a_n$$

Es convergente. Por otra parte:

$$a_1 = 1,\ a_2 = 0{,}5,\ a_3 = 0{,}16,\ a_4 = 0{,}04\ldots,\ a_5 = 0{,}008\ldots < 0{,}01$$

Será preciso tomar cuatro términos, ya que el error cometido al hallar la suma es menor que el primer término omitido $a_5 = 0{,}008\ldots$. Por tanto, la suma $A$, por defecto, será $A = -1 + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{24} = -\dfrac{5}{8}$.

# PROBLEMAS PROPUESTOS

Estudiar la convergencia de las series siguientes:

**4.42.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n+1}.$

**4.43.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2}{2n}.$

**4.44.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}.$

**4.45.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)^3}.$

**4.46.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2+n}.$

**4.47.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n}.$

**4.48.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}.$

**4.49.** $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(n^2-1)\cdot \ln n}.$

Dadas las series siguientes, se pide a) su término general; b) demostrar que son convergentes; y c) su suma:

**4.50.** $\displaystyle\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 9}+\dots$

**4.51.** $\displaystyle\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\dots$

**4.52.** Sumar la serie $0{,}045+0{,}015+0{,}005+\dots$

**4.53.** Sumar la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{3}{4}\right)^n.$

**4.54.** Hallar, con un error menor que $0{,}001$, la suma de la serie alternada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,\frac{1}{n\cdot 10^n}.$

CAPÍTULO



# LÍMITE Y CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN

El estudio de las funciones es uno de los objetivos fundamentales del Cálculo. En este capítulo se hará una introducción a las funciones reales de una variable real, y a los conceptos de límite y continuidad en un punto.



## 5.1. INTRODUCCIÓN

● DEFINICIÓN 5.1 *Dados dos subconjuntos $A, B \subseteq \mathbb{R}$, se llama función a toda aplicación (ver nota Sección 1.6) de $A$ en $B$, $f : A \to B$, es decir, a toda correspondencia entre $A$ y $B$ que asigna a cada valor de $x \in A$ un único valor $y = f(x) \in B$.*

A la variable $y$, cuyo valor depende del valor dado a $x$, se le llama *variable dependiente*. A $x$ se le llama *variable independiente*. Se representa la función por $y = f(x)$.

**EJEMPLO 5.1**

$$y = 3x + 1; \qquad y = \operatorname{sen} x; \qquad y = \frac{x+1}{x+3}$$

● DEFINICIÓN 5.2 *Se dice que la función $y = f(x)$ está definida en un punto $x = c$, si existe $f(c)$. Análogamente, se dice que $f(x)$ está definida en un intervalo $(a, b)$ si está definida para todo valor $x \in (a, b)$.*

● DEFINICIÓN 5.3 *Se llama dominio de definición o campo de existencia de una función $y = f(x)$ al conjunto de valores de $x$ para los que $f(x)$ está definida. Se representa por* $\operatorname{Dom} f$.

● DEFINICIÓN 5.4 *Se llama imagen o recorrido de la función $y = f(x)$ al conjunto de valores de $y$ para los que existe $x \in \mathbb{R}$, tal que $y = f(x)$. Se representa por* $\operatorname{Im} f$.

**EJEMPLO 5.2**

$$f(x) = 3x + 2; \qquad \operatorname{Dom} f = \mathbb{R}; \qquad \operatorname{Im} f = \mathbb{R}$$
$$f(x) = \operatorname{sen} x; \qquad \operatorname{Dom} f = \mathbb{R}; \qquad \operatorname{Im} f = [-1, 1]$$
$$f(x) = \frac{1}{x-1}; \qquad \operatorname{Dom} f = \mathbb{R} - \{1\}; \qquad \operatorname{Im} f = \mathbb{R} - \{0\}$$

## 5.2. TIPOS DE FUNCIONES

● DEFINICIÓN 5.5 *Función algebraica es aquélla en que las operaciones que se realizan con la variable independiente son suma, resta, multiplicación, división, potenciación o radicación.*

**EJEMPLO 5.3** La función $y = \dfrac{4 - 5x^2}{3x + 1}$ es algebraica.

● DEFINICIÓN 5.6 *Funciones trascendentes son las trigonométricas, logarítmicas y exponenciales.*

● DEFINICIÓN 5.7 *Función explícita es aquélla en la que la variable dependiente está despejada. Si la variable no está despejada, la función recibe el nombre de implícita. En funciones implícitas sencillas, es posible despejar la variable y escribir la función en su forma explícita.*

● DEFINICIÓN 5.8 *Funciones irracionales son aquéllas en las que la variable aparece bajo el signo radical o con exponente fraccionario. En caso contrario se llaman racionales.*

● DEFINICIÓN 5.9 *Función fraccionaria es aquélla en la que la variable independiente aparece en el denominador o con exponente negativo. En caso contrario, la función se llama entera.*

## 5.3. SUMA, PRODUCTO Y COCIENTE DE DOS FUNCIONES

● DEFINICIÓN 5.10 *Si $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones, y $D \subseteq \mathbb{R}$ es la intersección de sus dominios de definición, se define la suma de $f(x)$ y $g(x)$ como la función $h(x) = f(x) + g(x)$, de dominio $D \subseteq \mathbb{R}$.*

**EJEMPLO 5.4** Sean $f(x) = \ln\ x$ y $g(x) = \sqrt{3 - x}$, de dominios respectivos $(0, \infty)$ y $(-\infty, 3]$. La función $h(x) = f(x) + g(x) = \ln\ x + \sqrt{3 - x}$ tiene por dominio $(0, 3] = (0, \infty) \cap (-\infty, 3]$.

Análogamente se definen las funciones producto $f(x) \cdot g(x)$ y cociente $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, esta última con $g(x) \neq 0$.

## 5.4. COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

● DEFINICIÓN 5.11 *Sean las funciones $f(x)$ y $g(x)$. Se llama función compuesta $(g \circ f)(x)$ a la función definida en la forma:*

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)]$$

**EJEMPLO 5.5** Sean $f(x) = 2x + 1$ y $g(x) = 3x - 4$.

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(2x + 1) = 3(2x + 1) + 4 = 6x + 7$$
$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f(3x - 4) = 2(3x - 4) + 1 = 6x - 7$$

En el anterior ejemplo se observa que, en general, $(g \circ f)(x) \neq (f \circ g)(x)$.

## 5.5. FUNCIÓN INVERSA

● DEFINICIÓN 5.12 *Si $f : A \to B$ es una función biyectiva, esto es, tal que todo elemento $y \in B$ es imagen de un único elemento $x \in A$ (ver nota Sección 1.6), se define la función inversa $f^{-1} : B \to A$ como aquélla que verifica:*

$$f^{-1}[f(x)] = x, \ \forall x \in A$$
$$f[f^{-1}(y)] = y, \ \forall y \in B$$

● NOTA *Conviene no confundir $f^{-1}(x)$ con $\dfrac{1}{f(x)}$.*

**EJEMPLO 5.6** Sea la función $f(x) = 3x - 1$. Para hallar la función inversa de $f(x)$ se intercambian las variables $x$ e $y$: $x = 3y - 1$. Se despeja $y = \dfrac{x+1}{3}$. La función inversa de $f(x) = 3x - 1$ es $f^{-1}(x) = \dfrac{x+1}{3}$.

Evidentemente, las gráficas de dos funciones inversas son simétricas respecto de la bisectriz del primer cuadrante, puesto que si el punto $(a, b)$ pertenece a una de las gráficas, el punto $(b, a)$ pertenece a la otra. En este hecho se basa el cálculo de la función inversa $f^{-1}(x)$ (ver Ejemplo 5.6).

α

## 5.6. LÍMITE DE UNA FUNCIÓN

5.14

● DEFINICIÓN 5.13 *Se dice que la función $f(x)$ tiene por límite a la derecha del punto $x = x_0$ el número real $l$, si a toda sucesión de valores de $x$, que tiende a $x_0$ por la derecha, le corresponde una sucesión de valores de $f(x)$ que tiene por límite $l$. Se representa $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = l$.*

*Análogamente se define límite por la izquierda. Se representa en la forma $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = l$.*

*Para que exista el límite de $f(x)$, cuando $x$ tiende a $x_0$, es necesario y suficiente que se verifique: $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$, y se escribe $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$.*

5.13

● DEFINICIÓN 5.14 *~~También se puede decir que~~ $l$ es el límite de $f(x)$, cuando $x$ tiende a $x_0$ si $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta$ (func. de $\epsilon$) $> 0 \ / \ |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - l| < \epsilon$.*

**EJEMPLO 5.7** Sea la función $f(x) = \begin{cases} x + 1 \text{ si } x \geq 1 \\ x + 2 \text{ si } x < 1 \end{cases}$

Considerando una sucesión de valores de $x$ que tienda a 1 por la derecha y sus correspondientes imágenes:

$$x : \ 1{,}1, \ 1{,}01, \ 1{,}001, \ \ldots$$
$$f(x) : \ 2{,}1, \ 2{,}01, \ 2{,}001, \ \ldots$$

Las imágenes constituyen una sucesión que tiene por límite 2. Por tanto, $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 2$.

Por la izquierda:

$$x : \ 0{,}9, \ 0{,}99, \ 0{,}999, \ \ldots$$
$$f(x) : \ 2{,}9, \ 2{,}99, \ 2{,}999, \ \ldots$$

Por tanto, $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 3$.

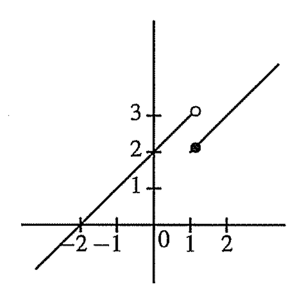



**Figura 5.1**

Como los límites a derecha e izquierda no coinciden, la función no posee límite en $x = 1$ (ver Figura 5.1).

En la práctica, los cálculos se disponen de la siguiente forma:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{h\to 0} f(1+h) = \lim_{h\to 0} (1+h)+1 = 2$$
$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{h\to 0} f(1-h) = \lim_{h\to 0} (1-h)+2 = 3$$

puesto que si los valores de $h$ son positivos y tienden a cero, i.e.: 0,1, 0,01, 0,001, . . . , es evidente que los valores de $1+h$ tienden a 1 por la derecha y, análogamente, los de $1-h$ tienden a 1 por la izquierda.



## 5.7. PROPIEDADES DE LOS LÍMITES

1. El límite de una función $f(x)$ en un punto $x = x_0$, si existe, es único.
2. El límite del producto de un número real $k$ por una función, en un punto $x = x_0$, es igual al producto de $k$ por el límite de la función:
$$\lim_{x\to x_0} k\cdot f(x) = k\cdot \lim_{x\to x_0} f(x)$$
3. El límite de la suma de dos funciones $f(x)$ y $g(x)$, en un punto $x = x_0$, es igual a la suma de los límites respectivos:
$$\lim_{x\to x_0} [f(x)+g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x)$$
4. El límite del producto de dos funciones $f(x)$ y $g(x)$, en un punto $x = x_0$, es igual al producto de los límites respectivos:
$$\lim_{x\to x_0} [f(x)\cdot g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim_{x\to x_0} g(x)$$
5. El límite del cociente de dos funciones $f(x)$ y $g(x)$, en un punto $x = x_0$, es igual al cociente de los límites respectivos:
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}, \text{ siendo } \lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0$$

6) $\lim_{x\to x_0} \ln f(x) = \ln \lim_{x\to x_0} f(x)$ 7) $\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = (\lim_{x\to x_0} f(x))^{\lim g(x)}$

## 5.8. FUNCIÓN CONTINUA

● DEFINICIÓN 5.15 *Se dice que la función $f(x)$ es continua en un punto $x = x_0$ si, y sólo si:*

*1) $f(x)$ está definida en $x = x_0$.*

*2) Existe $\lim_{x\to x_0} f(x)$, esto es, $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x)$.*

*3)* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

**EJEMPLO 5.8** Estudiar en $x = 1$ la continuidad de la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 5 & \text{si } x \leq 1 \\ x + 3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

1) $f(1) = 6$.
2) $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{h \to 0} f(1 + h) = \lim\limits_{h \to 0} (1 + h) + 3 = 4$.
$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{h \to 0} f(1 - h) = \lim\limits_{h \to 0} (1 - h)^2 + 5 = 6$.

La función carece de límite en $x = 1$, ya que no coinciden los límites a derecha e izquierda. Por lo tanto, no es continua en dicho punto.

Otra forma de definir función continua en un punto $x = a$ es:

● DEFINICIÓN 5.16 *La función $f(x)$ es continua en $x = x_0$ si, y sólo si, se verifica que $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta(\epsilon, x_0) > 0 \,/\, |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.*
*La expresión $\delta(\epsilon, x_0)$ simboliza que $\delta$ es función de $\epsilon$ y $x_0$.*

Esta definición equivale a decir que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Es decir, que existe el límite en el punto $x = x_0$ y coincide con $f(x_0)$.

● DEFINICIÓN 5.17 *Se dice que la función $f(x)$ es continua por la derecha en un punto $x = x_0$, si satisface la definición anterior de función continua reemplazando el límite en dicha definición por el límite por la derecha en el punto $x_0$. Análogamente se define función continua por la izquierda. Una función es continua en un punto $x_0$ si, y sólo si, es continua por la derecha y por la izquierda en $x_0$.*

● DEFINICIÓN 5.18 *Una función $f(x)$ es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, si $f(x)$ es continua en el intervalo abierto $(a, b)$, y además es continua por la derecha en $x = a$ y por la izquierda en $x = b$.*



## 5.9. TIPOS DE DISCONTINUIDAD

1. Discontinuidad evitable. Se presenta cuando la función posee límite en un punto $x = x_0$ (coinciden los límites laterales) y, sin embargo, dicho límite no coincide con el valor de la función en ese punto, como ocurre en la función de la Figura 5.2:

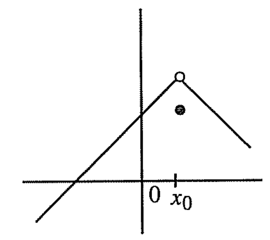



**Figura 5.2**

2. Discontinuidad de primera especie. Ocurre cuando existen los límites a derecha e izquierda en el punto $x = x_0$, pero no coinciden sus valores. La función presenta un *salto* igual a:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) - \lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

(Ver Figura 5.3).

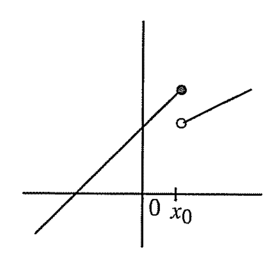



**Figura 5.3**

3. Discontinuidad de segunda especie o esencial. Ocurre cuando en un punto no existen o son infinito uno o los dos límites laterales. La función de la Figura 5.4 presenta discontinuidades de este tipo en los puntos $x_1$, $x_2$ y $x_3$:

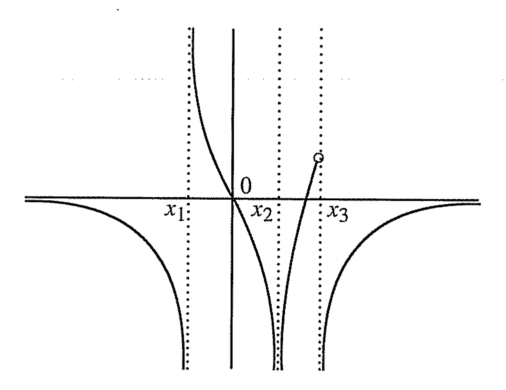



**Figura 5.4**



Por otra parte, si se tienen dos funciones $f(x)$ y $g(x)$, continuas en el punto $x = x_0$, su suma, producto, composición y cociente [si $g(x_0) \neq 0$] son continuas en $x = x_0$.

Asimismo, las funciones elementales, sen $x$, cos $x$, arc sen $x$, arc cos $x$, log $x$, polinómicas y exponenciales, son continuas en sus dominios respectivos.

## 5.10. CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO

● DEFINICIÓN 5.19 *Se dice que la función $f(x)$, de dominio $D \subseteq \mathbb{R}$, es creciente en el intervalo $(a, b) \subseteq D$ si $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$, $x_1 \leq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$.*

Gráficamente:

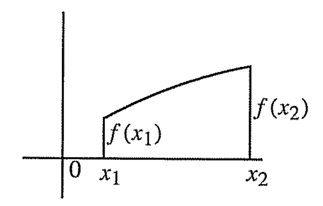



**Figura 5.5**

Análogamente se define función decreciente.

**Definición 5.20** *Se dice que la función $f(x)$, de dominio $D \subseteq \mathbb{R}$, es decreciente en el intervalo $(a, b) \subseteq D$, si $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$, $x_1 \leq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.*

## 5.11. MÁXIMO Y MÍNIMO DE UNA FUNCIÓN. ACOTACIÓN

**Definición 5.21** *Se dice que la función $f(x)$, de dominio $D \subseteq \mathbb{R}$, está acotada superiormente, si $\exists k \in \mathbb{R} \,/\, \forall x \in D$, $f(x) \leq k$.*

Análogamente se define función acotada inferiormente.

**Definición 5.22** *Se dice que la función $f(x)$, de dominio $D \subseteq \mathbb{R}$, está acotada inferiormente, si $\exists k \in \mathbb{R} \,/\, \forall x \in D$, $f(x) \geq k$.*

**Definición 5.23** *Si una función $f(x)$ está acotada superior e inferiormente, se dice que está acotada.*

**Definición 5.24** *Se dice que la función $f(x)$, de dominio $D \subseteq \mathbb{R}$, presenta un máximo absoluto en un punto $x_0 \in D$, si $\forall x \in D$, $f(x) \leq f(x_0)$. Análogamente se define mínimo absoluto.*

**Definición 5.25** *Si existe un intervalo $(a, b) \subset D \,/\, \forall x \in (a, b)$, $f(x) \leq f(x_0)$, se dice que la función $f(x)$ presenta un máximo relativo en el punto $x_0 \in (a, b)$. Análogamente se define mínimo relativo.*

**Proposición 5.1** *Toda función $f(x)$, continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, está acotada en él.*

Demostración. Si $f(x)$ no está acotada, existirán valores en $[a, b]$ para los que $f(x) > k$, siendo $k$ un número real cualquiera. Si se divide $[a, b]$ en dos partes iguales, al menos en una de ellas habrá valores para los que $f(x) > k$. Dividiendo dicha parte en dos partes iguales, habrá valores para los que $f(x) > k$ en una de las dos. Reiterando el proceso se obtiene una sucesión de intervalos encajados, cuya amplitud tiende a cero, en los que existen valores para los que $f(x) > k$.

Según el postulado de Cantor, existe un valor $\alpha$, común a todos los intervalos, para el que es posible encontrar un entorno en el que $|f(x) - f(\alpha)| < \epsilon$, por ser la función continua en $\alpha \in [a, b]$. Pero en este entorno hay valores para los que $f(x) > k$, lo que contradice que $|f(x) - f(\alpha)| < \epsilon$. Por tanto, la función ha de estar acotada, en contra de lo supuesto al comienzo. ∎

**Ejemplo 5.9** La función $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$, continua en $(3, 7]$, no está acotada en dicho intervalo, ya que para valores de $x$ mayores que 3 y arbitrariamente próximos a él, toma valores mayores que cualquier número positivo. Ello es debido a que no es continua en $x = 3$ (ver Figura 5.6).

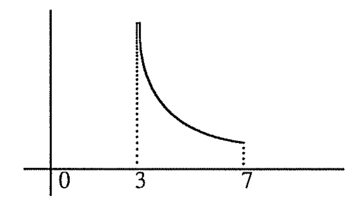



**Figura 5.6**

**Ejemplo 5.10** La proposición recíproca de la anterior no es cierta. Por ejemplo, la función $f(x) = x - E(x)$, donde $E(x)$ es la "parte entera de $x$", está acotada en el intervalo $[0, 2]$ y, sin embargo, es discontinua en $1 \in [0, 2]$ (ver Figura 5.7).

**Figura 5.7**

■ TEOREMA 5.1 (WEIERSTRASS) *Toda función $f(x)$, continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, admite un máximo y un mínimo en $[a, b]$.*

DEMOSTRACIÓN. Para el máximo. Según la proposición anterior, $f(x)$ está acotada en $[a, b]$, por ser continua en un intervalo cerrado. Sea $k$ la menor de las cotas superiores. Si existe $x_0 \in [a, b] \,/\, f(x_0) = k$, ya está demostrado; de no ser así, ha de cumplirse que $k - f(x) > 0$, $\forall x \in [a, b]$. Entonces, por la proposición anterior:

$$\exists k' \in \mathbb{R} \,/\, \frac{1}{k - f(x)} < k'$$

por ser:

$$g(x) = \frac{1}{k - f(x)}$$

continua en $[a, b]$. Por tanto:

$$\frac{1}{k - f(x)} < k' \Longrightarrow k - f(x) > \frac{1}{k'} \Longrightarrow f(x) < k - \frac{1}{k'}$$

lo que indica que $k$ no es la menor de las cotas superiores, en contra de lo supuesto. Hay que rechazar la hipótesis de que el máximo no es alcanzado por la función.

Análogamente se demostraría para el mínimo. ■

■ PROPOSICIÓN 5.2 *Si la función $f(x)$ es continua en $x_0$ y $f(x_0) \neq 0$, existe un entorno de $x_0$ en el que la función tiene el mismo signo que en el punto $x_0$.*

DEMOSTRACIÓN. Por ser $f(x)$ continua en $x_0$, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Siendo $f(x_0) = l > 0$ y tomando $\epsilon = l > 0$, existe un entorno de $x_0$ para el que $|f(x) - f(x_0)| < l$. De aquí se deduce que $f(x) - f(x_0) > -l \Longrightarrow f(x) > 0$, pues $f(x_0) = l$. ■

■ TEOREMA 5.2 (BOLZANO) *Si una función $f(x)$ es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, y toma valores de signo opuesto en $a$ y en $b$, la función se anula al menos en un punto interior de $[a, b]$.*

DEMOSTRACIÓN. Se supone que $f(a) > 0$ y $f(b) < 0$, sin perder generalidad.

Se considera el punto medio del intervalo $[a, b]$: $(a + b)/2$. Si $f(\frac{a+b}{2}) = 0$, el teorema está demostrado; de no ser así, por ejemplo, si $f(\frac{a+b}{2}) < 0$, se considera el intervalo $[a, \frac{a+b}{2}]$, en los extremos del cual la función toma valores de signo opuesto. Se repite el proceso, considerando el punto medio de este intervalo:

$$\frac{a + \frac{a+b}{2}}{2}$$

Si la función se anula en este punto, ya está demostrado; de no ser así, se sigue adelante. Según el postulado de Cantor, existe un punto $\alpha$, perteneciente a todos los intervalos, en el que la función se anula ya que, de no ser así, $f(x)$ ha de ser positiva en un entorno de $\alpha$, si $f(\alpha) > 0$, o negativa si $f(\alpha) < 0$, según la proposición anterior. Esto contradice el hecho de que $f(x)$ tome valores de signo opuesto en los extremos de cada intervalo. ■

**EJEMPLO 5.11** La ecuación $\cos x - 2x + 1 = 0$ tiene, al menos, una solución en el intervalo $[0, \pi/2]$.

La función $f(x) = \cos x - 2x + 1$ es continua en $[0, \pi/2]$, por ser suma de funciones continuas en dicho intervalo. Además:

$$f(0) = 2 > 0$$
$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\pi + 1 < 0$$

Según el teorema de Bolzano, existe $\alpha \in [0, \pi/2]$ / $f(\alpha) = 0$.

## 5.12. CONTINUIDAD UNIFORME

Recordando la Sección 5.8, dada una función $f(x)$, de dominio de definición $D$, se dice que es continua en $x_0 \in D \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0,\ \exists \delta(\epsilon, x_0) > 0 \ / \ |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.

En la anterior definición se observa que el valor de $\delta$ no depende solamente del valor tomado para $\epsilon$, sino que depende también del punto en cuestión $x_0$. En general, no será posible encontrar un único $\delta$ para un valor dado de $\epsilon$, ya que $\delta$ variará al variar $x_0$. Si se impone la condición de que $\delta$ dependa únicamente de $\epsilon$ en el intervalo $(a, b)$, se está estableciendo una condición más fuerte que la de simple continuidad en $(a, b)$ y se introduce el concepto de continuidad uniforme en dicho intervalo.

● DEFINICIÓN 5.26 *Una función $f(x)$, de dominio D, se dice que es uniformemente continua en* $(a, b) \subseteq D \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0,\ \exists \delta(\epsilon) \ / \ \forall x_1, x_2 \in (a, b),\ |x_1 - x_2| < \delta \Longrightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$.

Obviamente, si $f(x)$ es uniformemente continua en $(a, b)$, es continua en $(a, b)$. La afirmación recíproca, en general, no es cierta. Sin embargo, si $f(x)$ es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, es uniformemente continua en dicho intervalo (Cantor-Heine).

**EJEMPLO 5.12** La función $f(x) = x$ es uniformemente continua, $\forall x \in \mathbb{R}$. Se comprueba tomando $\delta = \epsilon$.

**EJEMPLO 5.13** La función $f(x) = 1/(x-1)$ es continua en $(0, 1)$, pero no es uniformemente continua en dicho intervalo. Se comprueba tomando valores cada vez más próximos a 1.

## 5.13. INFINITÉSIMOS

● DEFINICIÓN 5.27 *Se dice que la función $f(x)$ es un infinitésimo o infinitamente pequeña, cuando $x \to x_0$, si* $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$.

● DEFINICIÓN 5.28 *Dos infinitésimos $f(x)$ y $g(x)$ en $x_0$ son del mismo orden, si* $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l \in \mathbb{R} - \{0\}$.

● DEFINICIÓN 5.29 *Sean $f(x)$ y $g(x)$ infinitésimos en $x_0$. Se dice que $f(x)$ es un infinitésimo de mayor orden que $g(x)$, si* $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

● DEFINICIÓN 5.30 *Dos infinitésimos $f(x)$ y $g(x)$, con $x \to x_0$, son equivalentes si* $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$. *Se representa como:* $f(x) \approx g(x)$.

● NOTA *La importancia de la definición anterior radica en el hecho siguiente: si los infinitésimos $f(x)$ y $g(x)$ son equivalentes, el límite de una expresión en la que figura $f(x)$ como factor o divisor no se altera al sustituir $f(x)$ por $g(x)$.*

Cuando $x \to 0$, son equivalentes los infinitésimos siguientes:

$$\begin{array}{ll} \operatorname{sen} x \approx x & \operatorname{tg} x \approx x \\ \operatorname{arc\,sen} x \approx x & \operatorname{arc\,tg} x \approx x \\ \ln(1 \pm x) \approx \pm x & e^x - 1 \approx x \\ a^x - 1 \approx x \cdot \ln a,\ a > 0 & 1 - \cos x \approx (x^2)/2 \\ (1+x)^p \approx 1 + px & \sqrt[n]{x} - 1 \approx \ln \sqrt[n]{x} \end{array}$$

# PROBLEMAS RESUELTOS

Hallar el dominio de las siguientes funciones:

**5.1.** $f(x) = \sqrt[3]{2x+1}.$

**Resolución**

Dom $f(x) = \mathbb{R}$. La raíz existe para todo valor de $x \in \mathbb{R}$, por ser una raíz cúbica.

**5.2.** $f(x) = \dfrac{1}{9 - x^2}.$

**Resolución**

La función no existe para los valores de $x$ que anulan el denominador:

$$9 - x^2 = 0 \Longrightarrow x = \pm 3 \Longrightarrow \text{Dom } f(x) = \mathbb{R} - \{-3, 3\}$$

**5.3.** $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}.$

**Resolución**

El radicando ha de ser mayor o igual que cero para que exista la raíz cuadrada:

$$x^2 - 4 \geq 0 \Longrightarrow x^2 \geq 4 \Longrightarrow x \in (-\infty, -2] \cup [2, \infty) \Longrightarrow \text{Dom } f(x) = (-\infty, -2] \cup [2, \infty)$$

**5.4.** $f(x) = \sqrt{2 + x - x^2}.$

**Resolución**

Del mismo modo: $2 + x - x^2 \geq 0 \Longrightarrow (2-x)(1+x) \geq 0 \Longrightarrow x \in [-1, 2] \Longrightarrow \text{Dom } f(x) = [-1, 2]$

**5.5.** $f(x) = \sqrt{-x} + \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}.$

**Resolución**

El radicando de la primera raíz ha de ser mayor o igual que cero y el de la segunda mayor estrictamente que cero, por estar en el denominador. Por tanto:

$$x \leq 0 \text{ y } 1 + x > 0 \Longrightarrow x \leq 0 \text{ y } x > -1 \Longrightarrow x \in (-1, 0] \Longrightarrow \text{Dom } f(x) = (-1, 0]$$

**5.6.** $f(x) = \ln \dfrac{1+x}{1-x}$.

### Resolución

Puesto que los números negativos carecen de logaritmo, $\dfrac{1+x}{1-x} > 0$. Caben dos posibilidades:

$$\left.\begin{array}{l} 1+x>0 \\ 1-x>0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{l} x>-1 \\ x<1 \end{array}\right\} \Longrightarrow x \in (-1, 1)$$

$$\left.\begin{array}{l} 1+x<0 \\ 1-x<0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{l} x<-1 \\ x>1 \end{array}\right\} \Longrightarrow x \in \emptyset$$

Por tanto, Dom $f(x) = (-1, 1)$.

**5.7.** $f(x) = \ln(x^2 - 9)$.

### Resolución

$x^2 - 9 > 0 \Longrightarrow x^2 > 9 \Longrightarrow x \in (-\infty, -3) \cup (3, \infty)$. Por tanto, Dom $f(x) = (-\infty, -3) \cup (3, \infty)$.

**5.8.** $f(x) = \sqrt{2 - |x|}$.

### Resolución

$2 - |x| \geq 0 \Longrightarrow |x| \leq 2 \Longrightarrow -2 \leq x \leq 2 \Longrightarrow$ Dom $f(x) = [-2, 2]$

**5.9.** Dada la función $f(x+1) = x^2 - 3x + 1$, hallar $f(x-1)$.

### Resolución

Haciendo $x + 1 = y$, resulta:

$$f(y) = (y-1)^2 - 3(y-1) + 1 = y^2 - 5y + 5$$

Por tanto, $f(x-1) = (x-1)^2 - 5(x-1) + 5 = x^2 - 7x + 11$.

**5.10.** Hallar las funciones inversas de:

a) $f(x) = \dfrac{3}{2-x}$.

b) $f(x) = 4 + \ln(x-3)$.

### Resolución

a) $y = \dfrac{3}{2-x} \Longrightarrow 2y - xy = 3 \Longrightarrow x = \dfrac{2y-3}{y} \Longrightarrow f^{-1}(x) = \dfrac{2x-3}{x}$.

b) $y = 4 + \ln(x-3) \Longrightarrow y - 4 = \ln(x-3) \Longrightarrow x - 3 = e^{y-4} \Longrightarrow x = 3 + e^{y-4} \Longrightarrow f^{-1}(x) = 3 + e^{x-4}$.

**5.11.** Expresar $y$ como función de $x$, siendo:

a) $y = z^2 + 1$, $z = x + 2$.

b) $y = \sqrt{z+1}$, $z = \operatorname{sen}^2 x$.

**Resolución**

a) $y = z^2 + 1 = (x+2)^2 + 1 = x^2 + 4x + 5$.

b) $y = \sqrt{z+1} = \sqrt{\operatorname{sen}^2 x + 1}$.

**5.12.** Calcular $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \sqrt[5]{x+1}}{1 - \sqrt{x+1}}$.

**Resolución**

Es indeterminado, de la forma $0/0$. Se hace el cambio $x + 1 = t^{10}$, donde 10 es el m.c.m. de los índices de las raíces, resultando:

$$\lim_{t \to 1} \frac{1 - t^2}{1 - t^5} = \lim_{t \to 1} \frac{(1+t)(1-t)}{(1-t)(t^4 + t^3 + t^2 + t + 1)}$$
$$= \lim_{t \to 1} \frac{1+t}{t^4 + t^3 + t^2 + t + 1} = \frac{2}{5}$$

ya que si $x \to 0$, entonces $t \to 1$, puesto que $x + 1 = t^{10}$.

**5.13.** Calcular $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[a]{x} - 1}{\sqrt[b]{x} - 1}$, $a, b \in \mathbb{N}$.

**Resolución**

Haciendo el cambio $x = z^{ab}$, $z \to 1$, ya que $x \to 1$:

$$\lim_{z \to 1} \frac{z^b - 1}{z^a - 1} = \lim_{z \to 1} \frac{(z-1)(z^{b-1} + z^{b-2} + \cdots + z + 1)}{(z-1)(z^{a-1} + z^{a-2} + \cdots + z + 1)} = \frac{b}{a}$$

**5.14.** Calcular $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{\operatorname{arc\,sen} 3x^2}$.

**Resolución**

Es indeterminado, de la forma $0/0$. Sustituyendo infinitésimos equivalentes:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{\operatorname{arc\,sen} 3x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2/2}{3x^2} = \frac{1}{6}$$

**5.15.** Calcular $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3 \cdot \operatorname{sen} x}{(1 - \cos x)^2}$.

**Resolución**

Es de la forma $0/0$. Sustituyendo infinitésimos equivalentes:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3 \cdot \operatorname{sen} x}{(1-\cos x)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3 \cdot x}{\left(\frac{x^2}{2}\right)^2} = 4$$

**5.16.** Calcular $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(1-\cos 3x)}{x \cdot \operatorname{tg}\frac{x}{4} \cdot \cos x}$.

**Resolución**

Es de la forma $0/0$. Sustituyendo infinitésimos equivalentes:

$$\operatorname{sen}^2 \frac{3x}{2} \approx \left(\frac{3x}{2}\right)^2$$

y teniendo en cuenta que:

$$1 - \cos x = 2 \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}$$

se tiene:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}\left(2 \cdot \operatorname{sen}^2 \frac{3x}{2}\right)}{x \cdot \operatorname{tg}\frac{x}{4} \cdot \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}\left[2\left(\frac{3x}{2}\right)^2\right]}{x \cdot \frac{x}{4} \cdot \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}\frac{9x^2}{2}}{\frac{x^2}{4} \cdot \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{9x^2}{2}}{\frac{x^2}{4}} = 18$$

ya que $\lim_{x\to 0} \cos x = 1$.

**5.17.** Calcular $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x) \cdot \operatorname{arc\,tg}\frac{x}{2}}{x \cdot (1+\operatorname{tg}^2 x)}$.

**Resolución**

Es de la forma $0/0$. Teniendo en cuenta que $1+\operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x$ y que $\ln(1+x) \approx x$, se tiene:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x \cdot \frac{x}{2}}{x \cdot \sec^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{x \cdot \cos^2 x}{2} = 0$$

ya que $\lim_{x\to 0} \cos^2 x = 1$.

**5.18.** Calcular $\lim_{x\to 0} \dfrac{(\operatorname{sen} 3x - \operatorname{sen} x)^3}{(1-\cos 3x)\ \ln(1+x)}$.

**Resolución**

Usando las fórmulas de transformación de suma de ángulos en producto y las del ángulo mitad:

$$\operatorname{sen} 3x - \operatorname{sen} x = 2 \ \operatorname{sen} x \ \cos 2x$$

$$1 - \cos 3x = 2 \operatorname{sen}^2 \frac{3x}{2}$$

se tiene:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(2\ \operatorname{sen} x\ \cos 2x)^3}{2\ \operatorname{sen}^2 \dfrac{3x}{2} \cdot x} = \lim_{x\to 0} \frac{8x^3 \cdot \cos^3 2x}{2\left(\dfrac{3x}{2}\right)^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{8x^3}{\dfrac{9x^3}{2}} = \frac{16}{9}$$

**5.19.** Estudiar la continuidad de la función $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{si } x<1 \\ 3 & \text{si } x=1 \\ x+1 & \text{si } x>1 \end{cases}$ en el punto $x = 1$.

**Resolución**

1) $f(1) = 3$.

2) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{h\to 0} f(1+h) = \lim\limits_{h\to 0} (1+h)+1 = 2.$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{h\to 0} f(1-h) = \lim\limits_{h\to 0} (1-h^2)+1 = 2.$

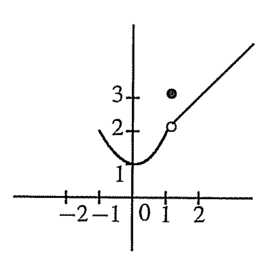



**Figura 5.8**

3) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2$, ya que $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$. Dicho límite no coincide con $f(1) = 3$ y la función presenta una discontinuidad evitable en $x = 1$ (ver Figura 5.8).

**5.20.** Estudiar la continuidad de la función $f(x) = E(x)$ (parte entera de $x$), para los valores enteros de $x$.

**Resolución**

1) $f(a) = a,\ a \in \mathbb{Z}$.

2) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{h\to 0} f(a+h) = \lim\limits_{h\to 0} E(a+h) = a.$

$\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{h\to 0} f(a-h) = \lim\limits_{h\to 0} E(a-h) = a-1.$

En los valores enteros presenta una discontinuidad de salto igual a 1 (ver Figura 5.9).

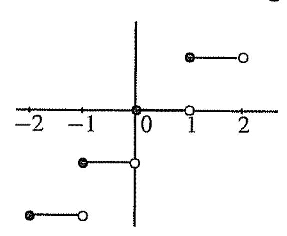



**Figura 5.9**

**5.21.** Estudiar la continuidad de la función $f(x) = x - E(x)$, para los valores enteros de $x$.

**Resolución**

(Ver Figura 5.7)

1) $f(a) = a - E(a) = a - a = 0, \ a \in \mathbb{Z}$.
2) $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{h \to 0} f(a+h) = \lim\limits_{h \to 0} a + h - E(a+h) = a - a = 0$.
$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{h \to 0} f(a-h) = \lim\limits_{h \to 0} a - h - E(a-h) = a - (a-1) = 1$.

En los valores enteros presenta una discontinuidad de salto igual a $-1$.

**5.22.** Estudiar la continuidad en $x = 2$ de la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & \text{si } x \neq 2 \\ a & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

**Resolución**

$\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2} (x+2) = 4$.

La función es continua en $x = 2$, si $a = 4$. Si $a \neq 4$, presenta una discontinuidad evitable (ver Figura 5.10).

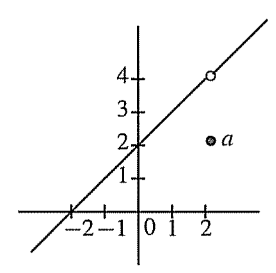



**Figura 5.10**

**5.23.** Estudiar la continuidad de la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{|x|} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

**Resolución**

1) $f(0) = 0$.
2) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{h \to 0} f(0+h) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{0+h}{|0+h|} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h}{h} = 1$.
$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{h \to 0} f(0-h) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{0-h}{|0-h|} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-h}{h} = -1$.

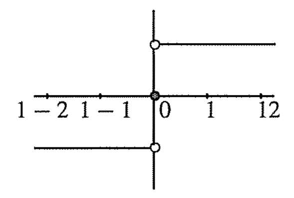



**Figura 5.11**

No tiene límite en $x = 0$. La función no es continua en dicho punto (ver Figura 5.11).

**5.24.** La función $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-1}$ no está definida en $x = -1$. ¿Cuál debe ser el valor de $f(-1)$ para que sea continua en ese punto?

**Resolución**

$$\lim_{x\to -1} \frac{x+1}{x^2-1} = \lim_{x\to -1} \frac{1}{x-1} = \frac{-1}{2}; \quad \text{Por tanto, } f(-1) \text{ ha de ser igual a } \frac{-1}{2}.$$

**5.25.** Estudiar la continuidad de la función $f(x) = \dfrac{1}{1+3^{1/x}}$, en $x = 0$. Estudiar su comportamiento en el infinito.

**Resolución**

No está definida en $x = 0$.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{h\to 0} f(0+h) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{1+3^{\frac{1}{h}}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{h\to 0} f(0-h) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{1+3^{\frac{1}{-h}}} = \frac{1}{1+\dfrac{1}{\infty}} = 1$$

Presenta una discontinuidad de salto $-1$ en $x = 0$ (ver Figura 5.12).
En el infinito:

$$\lim_{x\to \infty} f(x) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

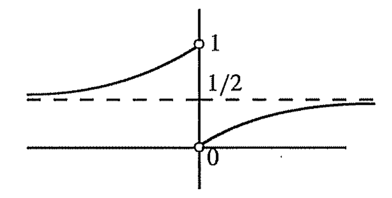



**Figura 5.12**

**5.26.** Estudiar la continuidad de la función $f(x) = \dfrac{1}{x - E(x)}$ y construir su gráfica.

**Resolución**

Dom $f(x) = \mathbb{R} - \{x \,/\, x \in \mathbb{Z}\}$

$$f(x) = \begin{cases} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \dfrac{1}{x+1} & \text{si } -1 < x < 0 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } 0 < x < 1 \\ \dfrac{1}{x-1} & \text{si } 1 < x < 2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \end{cases}$$

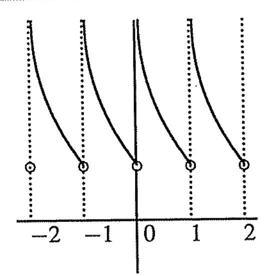



**Figura 5.13**

Es discontinua para los valores enteros de $x$:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{h\to 0} f(a+h) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{a+h-E(a+h)} = \frac{1}{0} = \infty$$

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{h\to 0} f(a-h) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{a-h-E(a-h)} = \frac{1}{a-(a-1)} = 1$$

**5.27.** Estudiar la continuidad, en $x=0$, de $f(x) = \begin{cases} e^{1/x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

### Resolución

1) $f(0) = 0$.

2) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{h\to 0} f(0+h) = \lim_{h\to 0} e^{\frac{1}{h}} = \infty.$

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{h\to 0} f(0-h) = \lim_{h\to 0} e^{\frac{1}{-h}} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{e^{\frac{1}{h}}} = 0.$

Presenta una discontinuidad esencial en $x=0$ (ver Figura 5.14).

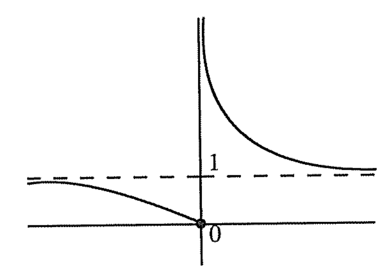



**Figura 5.14**

**5.28.** Sea $f : \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right] \to \mathbb{R}$ la función:

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg} x & \text{si } x \neq \frac{\pi}{2} \\ 1 & \text{si } x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

que verifica $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 > 0$ y $f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -1 < 0$.

Sin embargo, se cumple que $f(x) \neq 0$, $\forall x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$. ¿Contradice este hecho el teorema de Bolzano?

**Resolución**

No, ya que $f(x)$ no es continua en el punto $\frac{\pi}{2} \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$.

**5.29.** Verificar que la ecuación $x \cdot 3^x - 1 = 0$ tiene al menos una raíz en el intervalo $[0, 1]$.

**Resolución**

La función $f(x) = x \cdot 3^x - 1$ es continua en el intervalo $[0, 1]$ por ser combinación de funciones elementales continuas. Además:

$$f(0) = -1 < 0; \quad f(1) = 2 > 0$$

Por tanto, según el teorema de Bolzano, existe $\alpha \in (0, 1)$ tal que $f(\alpha) = 0$.

**5.30.** Demostrar que la ecuación $x = a \cdot \operatorname{sen} x + b$, $0 < a < 1$, $b > 0$ tiene, al menos, una raíz positiva menor o igual que $a + b$.

**Resolución**

La función $f(x) = x - a \cdot \operatorname{sen} x - b$ es continua por ser continuas las funciones que la componen. Además, $f(0) = -b < 0$, ya que $b > 0$.

Por otra parte, $f(a+b) = (a+b) - a \cdot \operatorname{sen}(a+b) - b = a - a \cdot \operatorname{sen}(a+b) = a \cdot [1 - \operatorname{sen}(a+b)] \geq 0$, ya que $-1 \leq \operatorname{sen}(a+b) \leq 1$ y $a > 0$.

Por lo tanto, ha de existir una raíz real positiva menor que $a + b$.

Si $\operatorname{sen}(a+b) = 1$, $f(a+b) = 0$.

**5.31.** Demostrar que la ecuación $x^{123} + \dfrac{250}{25 + \cos x + x^2} = 300$ tiene, al menos, una raíz real positiva.

**Resolución**

La función:

$$f(x) = x^{123} + \frac{250}{25 + \cos x + x^2} - 300$$

es continua en todo $\mathbb{R}$ por ser suma de funciones continuas y, además, $25 + \cos x + x^2 \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Por otra parte:

$$f(1) = 1 + \frac{250}{25 + \cos 1 + 1} - 300 < 0$$

ya que $-1 \leq \cos x \leq 1$.

Para $x = 2$:

$$f(2) = 2^{123} + \frac{250}{25 + \cos 2 + 4} - 300 > 0$$

Según el teorema de Bolzano, ha de existir una raíz en el intervalo $(1, 2)$.

**5.32.** Comprobar que la ecuación $x^3 - 2x - 5 = 0$ tiene una raíz en el intervalo $(2, 3)$ y aproximar dicha raíz con un error menor que $10^{-2}$.

**Resolución**

La función $f(x) = x^3 - 2x - 5$ es continua en todo $\mathbb{R}$ y $f(2) = -1 < 0$, $f(3) = 16 > 0$. Según el teorema de Bolzano, ha de tener una raíz en el intervalo $(2, 3)$.

Para hallar dicha raíz, se considera el punto medio del intervalo (2, 3) y se observa el signo de $f(x)$ en ese punto:

$$f(2{,}5) = 2{,}5^3 - 5 - 5 = 5{,}625 > 0$$

Como $f(2) < 0$ y $f(2{,}5) > 0$, en el intervalo (2, 2.5) ha de existir una raíz de $f(x)$, según el teorema de Bolzano.

Reiterando este procedimiento y tomando siempre intervalos en los que $f(x)$ tiene signos opuestos en los extremos, se acorta la longitud de los intervalos y se obtiene una mayor aproximación de la raíz de $f(x)$. Así se llega a obtener el intervalo (2.09375, 2.109), y el punto medio $\alpha = 2{,}101375$ será la raíz buscada, con un error menor que $10^{-2}$, puesto que la distancia de $\alpha$ a los extremos del intervalo es menor que $10^{-2}$.

# PROBLEMAS PROPUESTOS

En los siguientes ejercicios hallar el dominio de definición de las funciones:

**5.33.** $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$.

**5.34.** $f(x) = \dfrac{1}{4-x^2}$.

**5.35.** $f(x) = \sqrt{x^2-2}$.

**5.36.** $f(x) = \sqrt{1-x^2}$.

**5.37.** $f(x) = \sqrt{-x} + \dfrac{1}{\sqrt{2+x}}$.

**5.38.** $f(x) = \log \dfrac{2+x}{2-x}$.

**5.39.** $f(x) = \log(x^2-4)$.

**5.40.** $f(x) = \operatorname{arc\,sen} \log \dfrac{x}{10}$.

**5.41.** $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\operatorname{sen} \pi x}$.

**5.42.** $f(x) = \sqrt{\log(\operatorname{tg} x)}$.

**5.43.** $f(x) = \sqrt{|x| - x}$.

**5.44.** $f(x) = \sqrt{\operatorname{sen} x - 1}$.

**5.45.** $f(x) = \sqrt{1-|x|}$.

**5.46.** $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-|x|}}$.

**5.47.** $f(x) = \operatorname{arc\,sen} \sqrt{2x}$.

**5.48.** Construir las gráficas de las funciones siguientes:

- $f(x) = \log_2 x$.
- $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$.
- $f(x) = 2^x$.
- $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

**5.49.** Construir la gráfica de las funciones:

- $f(x) = \sqrt{x - E(x)}$.
- $f(x) = E(x) + \sqrt{x - E(x)}$.
- $f(x) = \{x\}$, siendo $\{x\}$ = distancia al entero más próximo.

**5.50.** Hallar $f(x+1)$, dada la función $f\left(\frac{x}{2}\right) = 3x^2 - 2x + 5$.

**5.51.** Hallar las funciones inversas de:

- $f(x) = 3 \cdot \operatorname{arc\,cos} x^2$.
- $f(x) = 4 \cdot \operatorname{sen} 5x$.

Expresar $y$ como función de $z$, en los siguientes ejercicios:

**5.52.** $y = 2x^2$, $x = 3z + 2$.

**5.53.** $y = \sqrt{4x - 2}$, $x = e^t$, $t = \ln z$.

**5.54.** Siendo $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ y $g(x) = x^2 - 5$, hallar $f \circ g$ y $g \circ f$.

**5.55.** Expresar el área de un trapecio isósceles, de bases $a$ y $b$, en función del ángulo $x$ de la base $a$. Construir la gráfica de la función para $a = 2$ y $b = 1$.

**5.56.** Calcular $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sqrt{\dfrac{x^2 - x}{x^2 - 1}}\right)^{\frac{x+1}{3}}$.

**5.57.** Hallar $n$ para que $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x+n}{x}\right)^{\frac{x}{2}} = 6$.

**5.58.** Estudiar la continuidad, para los valores enteros de $x$, de la función $f(x) = E(x) + \sqrt{x - E(x)}$.

**5.59.** Estudiar la continuidad de la función $f(x) = \dfrac{1}{1 + 2^{\operatorname{tg} x}}$.

**5.60.** Estudiar la continuidad y representar gráficamente la función:

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Estudiar su comportamiento en el infinito.

**5.61.** Estudiar la continuidad de la función:

$$f(x) = \frac{2^{\frac{1}{x-3}} - 1}{2^{\frac{1}{x-3}} + 1}$$

Estudiar su comportamiento en el infinito.

**5.62.** Estudiar la continuidad de la función:

$$f(x) = \frac{1}{1 - e^{1-x}}$$

**5.63.** Estudiar la continuidad de la función:

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{1-x}}}$$

**5.64.** Estudiar la continuidad de la función:

$$f(x) = x \cdot \operatorname{sen} \frac{1}{x}$$

**5.65.** Encontrar una función $f(x)$ discontinua en todos los puntos de su dominio siendo $|f(x)|$, sin embargo, continua en todos ellos.

**5.66.** Hallar $n$ para que sea continua la función:

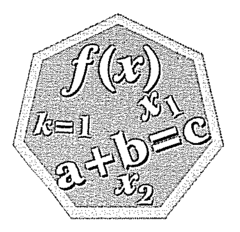
$$f(x) = \begin{cases} e^x - 1 & \text{si } x < 0 \\ n + x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

**5.67.** Estudiar la continuidad de la función:

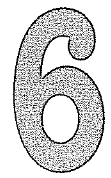
$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in \mathbb{I} \\ 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

**5.68.** Demostrar que la ecuación $x^{23} - \dfrac{54}{x^2 - \operatorname{sen} x + 2} = 50$ tiene, al menos, una raíz real.

**5.69.** Hallar una raíz real de la ecuación $x^3 - 3x + 3 = 0$, con un error menor que $10^{-1}$.




CAPÍTULO




# DERIVADA DE UNA FUNCIÓN

El concepto de derivada surgió en el siglo XVII con el problema de hallar la tangente a una función en uno de sus puntos, y fue desarrollado por Newton y Leibnitz a partir de las ideas de Fermat.

## 6.1. CONCEPTO DE DERIVADA

Sea la función $f(x)$, definida en $D \subseteq \mathbb{R}$. Sea el punto $x \in D$, en el que se desea hallar la ecuación de la recta tangente a la función $f(x)$. Para ello, será preciso hallar la pendiente de dicha recta tangente.

Sea $A(x, f(x))$ el punto en cuestión. Considerando un punto $B$, próximo a $A$, $B(x+h, f(x+h))$, la pendiente de la cuerda $AB$ será (ver Figura 6.1):

$$m_{\text{cuerda}} = \operatorname{tg}\alpha = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

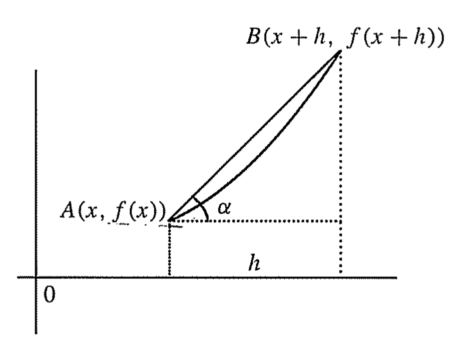



**Figura 6.1**

Pero lo que se desea hallar es la pendiente de la recta tangente en el punto $A$. Si $h \to 0$, el punto $B$ tiende a confundirse con el punto $A$, y la cuerda $AB$ tiende a confundirse con la tangente en $A$. Por tanto:

$$m_{\text{tangente}} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Si existe, el límite anterior recibe el nombre de derivada de $f(x)$ en el punto $x \in D$, y se representa $f'(x)$ o, también, $\dfrac{dy}{dx}$.

**EJEMPLO 6.1** Sea la función $f(x) = x^2$. Se desea hallar la ecuación de la recta tangente en $x = 1$.

La derivada de $f(x)$:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h\to 0} (2x + h) = 2x$$

Para $x = 1$:

$$m_{\text{tangente}} = f'(1) = 2 \cdot 1 = 2$$

Por tanto, la ecuación de la recta tangente será: $y - 1 = 2(x - 1)$ (ver Figura 6.2).

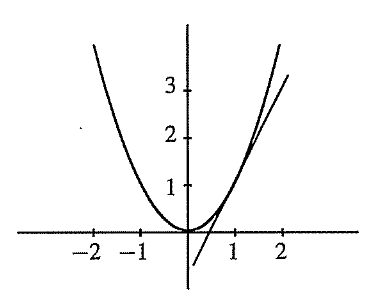



**Figura 6.2**

**EJEMPLO 6.2** Hallar la ecuación de la recta tangente a la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ en el punto de abscisa $x = -1$.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} == \lim_{h\to 0} \frac{\frac{-h}{x^2+xh}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{x^2+xh} = -\frac{1}{x^2}$$

La derivada en $x = -1$ es $f'(-1) = -1$. La ecuación de la recta tangente en $(-1, -1)$ es $y + 1 = -(x + 1)$.

El cálculo de la derivada de una función mediante la definición (como se hizo en los dos ejemplos anteriores) es largo y dificultoso. Por ello, a continuación se va a construir una tabla de derivadas que permita hacer dicha operación de un modo sencillo y rápido.

## 6.2. DERIVADA DE UNA FUNCIÓN CONSTANTE

Sea $f(x) = k$, con $k \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{k - k}{h} = 0$$

## 6.3. DERIVADA DE LA FUNCIÓN $f(x) = x^n$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{\binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}\cdot h + \cdots + \binom{n}{n}h^n - x^n}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \left[\binom{n}{1}x^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2}\cdot h + \cdots + \binom{n}{n}h^{n-1}\right] = n \cdot x^{n-1}$$

## 6.4. DERIVADA DE LA SUMA DE DOS FUNCIONES

Sean las funciones $f(x)$ y $g(x)$:

$$(f+g)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(f+g)(x+h) - (f+g)(x)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x) + g(x+h) - g(x)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$
$$= f'(x) + g'(x)$$

La derivada de la suma de dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ es igual a la suma de las derivadas respectivas $f'(x)$ y $g'(x)$.

## 6.5. DERIVADA DEL PRODUCTO DE DOS FUNCIONES

Sean las funciones $f(x)$ y $g(x)$:

$$(f\cdot g)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(f\cdot g)(x+h) - (f\cdot g)(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)\cdot g(x+h) - f(x)\cdot g(x)}{h}$$

Sumando y restando la expresión $f(x+h)\cdot g(x)$:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)\cdot g(x+h) - f(x+h)\cdot g(x) + f(x+h)\cdot g(x) - f(x)\cdot g(x)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} f(x+h)\cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}\cdot g(x)$$
$$= f(x)\cdot g'(x) + f'(x)\cdot g(x)$$

## 6.6. DERIVADA DE $k \cdot f(x)$

Es igual a $k \cdot f'(x)$, consecuencia inmediata de la derivada de un producto.

## 6.7. DERIVADA DE $\frac{1}{g(x)}$

Representando la función $g(x)$ por $g$:

$$g\cdot \frac{1}{g} = 1 \Longrightarrow g\cdot \left(\frac{1}{g}\right)' + g'\cdot \frac{1}{g} = 0 \Longrightarrow \left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$$

## 6.8. DERIVADA DEL COCIENTE DE DOS FUNCIONES

Utilizando el resultado anterior:

$$\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g} \Longrightarrow \left(\frac{f}{g}\right)' = f' \cdot \frac{1}{g} + f \cdot \frac{-g'}{g^2} = \frac{f'}{g} - \frac{f \cdot g'}{g^2} = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

## 6.9. DERIVADA DE $f^n$

$$(f^2)' = (f \cdot f)' = f \cdot f' + f' \cdot f = 2ff'$$
$$(f^3)' = (f^2 \cdot f)' = (f^2)' \cdot f + f^2 \cdot f' = 2f^2 f' + f^2 f' = 3f^2 f'$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

En general, la derivada de $f^n$ será $n \cdot f^{n-1} f'$.

Se demuestra por inducción. Suponiendo que es cierto para $n = k$: $(f^k)' = k \cdot f^{k-1} \cdot f'$, habrá que demostrarla para $n = k + 1$:

$$(f^{k+1})' = (f^k \cdot f)' = (f^k)' \cdot f + f^k \cdot f' = (k \cdot f^{k-1} \cdot f') \cdot f + f^k \cdot f' = (k+1) \cdot f^k \cdot f'$$

## 6.10. DERIVADA DE LAS FUNCIONES HIPERBÓLICAS

$$(\operatorname{sh} x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x$$
$$(\operatorname{ch} x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x$$

Del mismo modo se procedería con distintas funciones hasta completar la tabla de derivadas:

$$(\operatorname{sen} f)' = f' \cdot \cos f \qquad (\ln f)' = \frac{f'}{f}$$
$$(\cos f)' = -f' \cdot \operatorname{sen} f \qquad (\log_a f)' = \frac{f'}{f \cdot \ln a}$$
$$(\operatorname{tg} f)' = \frac{f'}{\cos^2 f} \qquad (a^f)' = f' \cdot a^f \cdot \ln a$$
$$(e^f)' = f' \cdot e^f \qquad (\operatorname{arc\,sen} f)' = \frac{f'}{\sqrt{1 - f^2}}$$
$$(\operatorname{arc\,cos} f)' = \frac{-f'}{\sqrt{1 - f^2}} \qquad (\operatorname{arc\,tg} f)' = \frac{f'}{1 + f^2}$$
$$(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} \qquad (\operatorname{cth} x)' = \frac{-1}{\operatorname{sh}^2 x} \quad (x \neq 0)$$

## 6.11. REGLA DE LA CADENA

Si $y = f(u)$, siendo $u = g(x)$, es decir, $y = f[g(x)]$, la derivada de $y$ con respecto a $x$, $\dfrac{dy}{dx}$, es:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

**EJEMPLO 6.3** Sean $y = 2u^2 - 2$ y $u = 3x + 1$. Aplicando la regla anterior:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 4u \cdot 3 = 12(3x+1) = 36x + 12$$

Se puede hacer una comprobación escribiendo $y$ en función de $x$, y derivando a continuación:

$$y = 2(3x+1)^2 - 2 \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = 36x + 12$$

## 6.12. DERIVACIÓN IMPLÍCITA

Si la relación entre $x$ e $y$ viene dada por una función no despejada para $y$, se dice que $y$ es función implícita de $x$. Por ejemplo, $3x^2y - 6xy^3 + 7 = 0$.

Suele ocurrir que no interesa, o no es posible, despejar $y$ para obtenerla como función explícita de $x$. En este caso, se deriva término a término, considerando $y$ como función de $x$.

**EJEMPLO 6.4** Para la función anterior, $3x^2y - 6xy^3 + 7 = 0$, derivando implícitamente: $6xy + 3x^2y' - 6y^3 - 18xy^2y' = 0$.

## 6.13. DERIVADAS LATERALES

● DEFINICIÓN 6.1 *Se definen las derivadas de $f(x)$, a la derecha y a la izquierda del punto $x = a$, como los límites respectivos:*

$$f'_+(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \text{y} \quad f'_-(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a-h) - f(a)}{-h}$$

*donde $h > 0$.*

La condición necesaria y suficiente para la existencia de la derivada $f'(a)$ es que $f'_+(a) = f'_-(a)$, y se dice que la función $f(x)$ es derivable en $x = a$.

**EJEMPLO 6.5** Derivadas laterales en $x = 0$ de la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \geq 0 \\ x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$f'_+(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(0+h)^2 - 0}{h} = \lim_{h \to 0} h = 0$$

$$f'_-(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0-h) - f(0)}{-h} = \lim_{h \to 0} \frac{(0-h) - 0}{-h} = 1$$

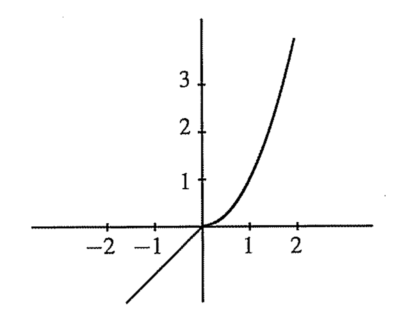



**Figura 6.3**

En la Figura 6.3, se puede observar que, a la derecha de $x = 0$, la semirrecta tangente es horizontal y la derivada (pendiente) es igual a cero. A la izquierda, el ángulo de la semirrecta tangente con el eje OX es de 45° y, por tanto, la derivada es igual a 1. La función no es derivable en $x = 0$, ya que no coinciden las derivadas a derecha e izquierda en dicho punto.

**EJEMPLO 6.6** Derivadas laterales en $x = 0$ de la función $f(x) = |x|$.

$$f'_+(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|0+h| - 0}{h} = 1$$
$$f'_-(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0-h) - f(0)}{-h} = \lim_{h\to 0} \frac{|0-h| - 0}{-h} = -1$$

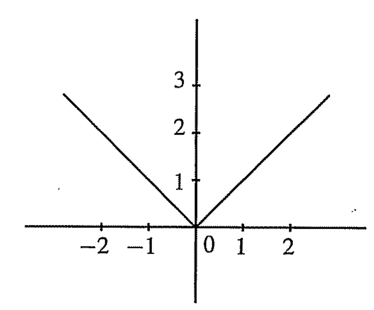



**Figura 6.4**

Por tanto, en un punto "anguloso" falla la derivabilidad de una función, al no coincidir las rectas tangentes a derecha e izquierda (ver Figura 6.4).



## 6.14. RELACIÓN ENTRE DERIVABILIDAD Y CONTINUIDAD

■ PROPOSICIÓN 6.1 *Si la función $f : D \to \mathbb{R}$ es derivable en el punto $a \in D$, es continua en dicho punto.*

DEMOSTRACIÓN. Considerando el siguiente límite:

$$\lim_{h\to 0} \left[f(a+h) - f(a)\right] = \lim_{h\to 0} \left[\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \cdot h\right] = f'(a) \cdot \lim_{h\to 0} h$$
$$= f'(a) \cdot 0 = 0 \Longrightarrow \lim_{h\to 0} f(a+h) = f(a)$$

que es la condición para que $f(x)$ sea continua en $x = a$. ■

En general, la proposición recíproca no es cierta, como se puede apreciar en la función $f(x) = |x|$, continua y no derivable en $x = 0$.

La proposición anterior y su contrarrecíproca [si $f(x)$ no es continua en $x = a \Longrightarrow f(x)$ no es derivable en $x = a$] van a resultar de gran utilidad en la práctica, a la hora de estudiar la derivabilidad y continuidad de una función en un punto.

**EJEMPLO 6.7** Estudiar, en el punto $x = 0$, la derivabilidad y continuidad de la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Las derivadas laterales:

$$f'_{+}(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(0+h)^2+1-1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2}{h} = \lim_{h\to 0} h = 0$$

$$f'_{-}(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0-h)-f(0)}{-h} = \lim_{h\to 0} \frac{1-1}{-h} = 0$$

La función es derivable en $x = 0$. Por tanto, la función es continua en dicho punto.

## 6.15. DIFERENCIAL DE UNA FUNCIÓN

● DEFINICIÓN 6.2 *Sea $y = f(x)$ una función derivable en un punto $x = a$. Se llama diferencial $dy$ de la función en dicho punto al producto $f'(a) \cdot dx$, siendo $dx$ el incremento de la variable $x$:*

$$dy = f'(a) \cdot dx$$

En la Figura 6.5, la pendiente de la recta tangente a la función en el punto $x = a$ es:

$$f'(a) = \operatorname{tg}\alpha = \frac{CD}{AC} = \frac{CD}{dx} \Longrightarrow CD = f'(a) \cdot dx$$

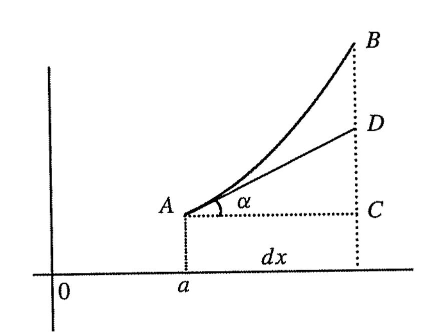



**Figura 6.5**

Cuando $dx$ tiende a cero, $CD \approx CB = dy = f'(a) \cdot dx$, pues la recta tangente tiende a confundirse con la función, siendo $dy$ el incremento que experimenta la variable dependiente para un pequeño incremento $dx$ de la variable independiente $x$.

Al introducir el concepto de *diferencial*, la notación $\frac{dy}{dx}$ no es ya simplemente simbólica, es una fracción real.

**EJEMPLO 6.8** El radio de un círculo es igual a 10 cm, ¿qué variación experimenta su superficie cuando dicho radio aumenta en 2 mm?

La superficie $S$ es función del radio $r$: $S = \pi \cdot r^2$. La diferencial:

$$dS = 2\pi r \cdot dr$$

Si $r = 10$ cm y $dr = 2$ mm $= 0{,}2$ cm:

$$dS = 2\pi \,.\, 10 \,.\, 0{,}2 = 4\pi = 12{,}56 \text{ cm}^2$$

Es fácil de comprobar restando las superficies:

$$\pi \cdot (10{,}2)^2 - \pi \cdot 10^2 = 12{,}68 \text{ cm}^2$$

Este último es el valor exacto, 12,68 cm$^2$, mientras que el anteriormente obtenido, 12,56 cm$^2$, es el valor aproximado utilizando la diferencial, esto es, la recta tangente en lugar de la función.

## 6.16. TEOREMAS SOBRE DERIVABILIDAD

■ TEOREMA 6.1 (ROLLE) *Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en $(a, b)$. Si $f(a) = f(b)$, existe al menos un punto $\alpha \in (a, b)$, tal que $f'(\alpha) = 0$.*

DEMOSTRACIÓN. Si $f(x)$ es constante, su derivada es cero, y el teorema es evidente. Si $f(x)$ no es constante, tomará valores mayores que $f(a)$, menores que $f(a)$, o ambas cosas. Si toma valores mayores que $f(a)$, alcanzará su máximo $k$ al menos una vez en el intervalo $(a, b)$ (Weierstrass). Sea $\alpha \in (a, b)$, tal que $f(\alpha) = k$. Las derivadas a derecha e izquierda en $\alpha$:

$$f'_+(\alpha) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\alpha + h) - f(\alpha)}{h}; \qquad f'_-(\alpha) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\alpha - h) - f(\alpha)}{-h}$$

Puesto que en $x = \alpha$ la función alcanza un máximo, si $h$ tiende a cero, $f(\alpha + h) - f(\alpha) \leq 0 \Longrightarrow f'_+(\alpha) \leq 0$.

Razonando de igual modo, $f'_-(\alpha) \geq 0$. Al ser la función derivable en el punto $\alpha \in (a, b)$, $f'_+(\alpha) = f'_-(\alpha) \Longrightarrow f'(\alpha) = 0$. ■

**EJEMPLO 6.9** La función $f(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2}$ toma en los extremos del intervalo $[0, 2]$ el mismo valor, $f(0) = f(2) = 1$. Sin embargo, no es aplicable el teorema de Rolle, ya que:

$$f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x-1}}$$

no existe en $1 \in [0, 2]$.

**EJEMPLO 6.10** La función $f(x) = |x|$ no verifica las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[-1, 1]$ ya que, a pesar de ser continua en dicho intervalo y $f(-1) = f(1)$, no es derivable en $x = 0$, como se vio con anterioridad.

La razón por la que en el teorema de Rolle se impone que $f(x)$ ha de ser continua en $[a, b]$, en lugar de en $(a, b)$, se puede ver en el siguiente ejemplo.

**EJEMPLO 6.11** Sea la función:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = -\dfrac{\pi}{2} \\ \operatorname{tg} x & \text{si } -\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2} \\ 1 & \text{si } x = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Es continua y derivable en $(-\pi/2, \pi/2)$ y $f(-\pi/2) = f(\pi/2)$. Sin embargo, no existe ningún punto $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$, tal que $f'(\alpha) = 1/\cos^2\alpha = 0$, ya que no es continua en el intervalo cerrado $[-\pi/2, \pi/2]$, aunque sí lo es en $(-\pi/2, \pi/2)$ (ver Figura 6.6).

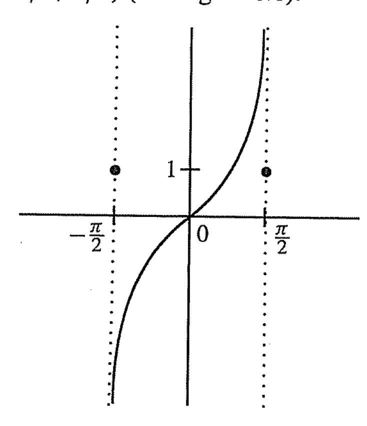



**Figura 6.6**

■ TEOREMA 6.2 (DEL VALOR MEDIO DE CAUCHY) *Si las funciones $f(x)$ y $g(x)$ son continuas en $[a, b]$ y derivables en $(a, b)$, existe al menos un $\alpha \in (a, b)$ tal que:*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)}$$

DEMOSTRACIÓN. Considerando la función:

$$F(x) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & 1 \\ f(b) & g(b) & 1 \\ f(a) & g(a) & 1 \end{vmatrix} = [g(b) - g(a)]\, f(x) - [f(b) - f(a)]\, g(x) + f(b)\, g(a) - f(a)\, g(b)$$

La función $F(x)$ es continua en $[a, b]$ y derivable en $(a, b)$, por ser combinación lineal de las funciones $f(x)$ y $g(x)$, continuas en $[a, b]$ y derivables en $(a, b)$. Además, $F(a) = F(b) = 0$. Por tanto, según el teorema de Rolle, existe $\alpha \in (a, b)$ tal que $F'(\alpha) = 0$. Derivando:

$$F'(x) = [g(b) - g(a)]\, f'(x) - [f(b) - f(a)]\, g'(x)$$

Haciendo $F'(\alpha) = 0$:

$$f'(\alpha) - [f(b) - f(a)]\, g'(\alpha) = 0$$

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)} \quad ■$$

**EJEMPLO 6.12** Sean $f(x) = 6x - 2$ y $g(x) = x^2 + 5$, continuas en $[0, 1]$ y derivables en $(0, 1)$:

$$\frac{f(1) - f(0)}{g(1) - g(0)} = \frac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)} \Longrightarrow \frac{4 - (-2)}{6 - 5} = \frac{6}{2\alpha} \Longrightarrow \alpha = \frac{1}{2}$$

■ TEOREMA 6.3 (DEL VALOR MEDIO DE LAGRANGE O DE LOS INCREMENTOS FINITOS) *Si $f(x)$ es continua en $[a, b]$ y derivable en $(a, b)$, existe al menos un punto $\alpha \in (a, b)$ tal que:*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\alpha)$$

DEMOSTRACIÓN. Es consecuencia inmediata del teorema anterior, tomando $g(x) = x$, ya que $g(a) = a$, $g(b) = b$ y $g'(x) = 1$. ■

Es posible dar una sencilla interpretación geométrica del teorema anterior observando que el primer miembro es la pendiente de la cuerda que une los puntos $A$ y $B$, y que el segundo miembro es la pendiente de la recta tangente en $x = \alpha$. El teorema viene a decir que existe un punto $\alpha$ en el que la recta tangente es paralela a la cuerda $\overline{AB}$ (ver Figura 6.7).

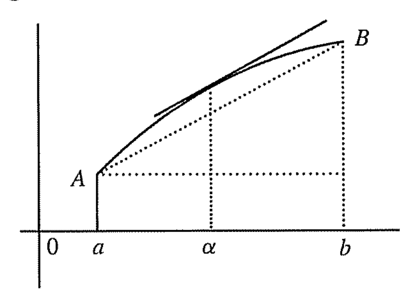



**Figura 6.7**

■ TEOREMA 6.4 (L'HOPITAL) *Sean las funciones $f(x)$ y $g(x)$ derivables en un entorno del punto $x_0$,* $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ *y tales que sus derivadas no se anulan simultáneamente en ningún punto de dicho entorno, salvo en $x_0$. Si ambas tienden simultáneamente a cero (o a infinito) cuando $x$ tiende a $x_0$, se verifica:*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

DEMOSTRACIÓN. Se va a hacer para el caso de que ambas tiendan a cero simultáneamente. Según el teorema del valor medio de Cauchy $\exists\alpha \in (x_0, x)$, tal que:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)}$$

Puesto que $\alpha$ está entre $x_0$ y $x$, $\alpha \to x_0$ cuando $x \to x_0$, resultando:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \blacksquare$$

**EJEMPLO 6.13**

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} e^x = e^0 = 1$$

**EJEMPLO 6.14**

$$\lim_{x\to 0} \frac{x \cdot \operatorname{sen} x}{1 - \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x + x \cdot \cos x}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0} \frac{2 \cdot \cos x - x \cdot \operatorname{sen} x}{\cos x} = 2$$

## 6.17. CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO

El crecimiento (Capítulo 5) de una función derivable se puede estudiar mediante la derivada de un modo sencillo. Si $f'(x_0) > 0$, la función es creciente en $x_0$, puesto que $f'(x_0)$ es la pendiente $m$ de la tangente a la función en dicho punto ($m = \operatorname{tg}\alpha$). Como la pendiente es positiva, el ángulo $\alpha$, que forma la recta tangente con el eje OX, es $0 < \alpha < \pi/2$ y, por tanto, $f(x)$ es creciente en $x_0$ (ver Figura 6.8). Análogamente, si $f'(x_0) < 0$, la función es decreciente en $x_0$.

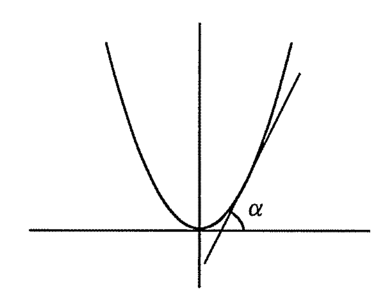



**Figura 6.8**

■ TEOREMA 6.5 *Sea $f(x)$ derivable en $(a, b)$. La función $f(x)$ es creciente en $(a, b) \Leftrightarrow f'(x) \geq 0\ \forall x \in (a, b)$. De modo análogo, la función $f(x)$ es decreciente en $(a, b) \Leftrightarrow f'(x) \leq 0\ \forall x \in (a, b)$.*

■ TEOREMA 6.6 *Sea $f(x)$ derivable en $(a, b)$. Si $f'(x) > 0\ \forall x \in (a, b) \Longrightarrow f(x)$ es estrictamente creciente en $(a, b)$. De modo análogo, $f'(x) < 0\ \forall x \in (a, b) \Longrightarrow f(x)$ es estrictamente decreciente en $(a, b)$.*

*En general, el recíproco no es cierto.*

## 6.18. MÁXIMOS Y MÍNIMOS

Al igual que el estudio del crecimiento y decrecimiento, la búsqueda de máximos y mínimos (Capítulo 5) de una función derivable se puede realizar de un modo adecuado al cálculo mediante la derivada.

Si en un punto $x_0$ se verifica que $f'(x_0) = 0$, la tangente a $f(x)$ es horizontal en dicho punto. Para averiguar si en $x_0$ la función presenta un máximo o un mínimo, se calcula $f''(x_0)$: si $f''(x_0) < 0$, en $x_0$ hay un máximo. Si $f''(x_0) > 0$, en $x_0$ hay un mínimo. Pero el problema se plantea cuando en $x_0$ se anulan la primera y segunda derivadas simultáneamente. En general:

■ TEOREMA 6.7 *Sea $f(x)$ derivable $n$ veces en $x_0$ y:*

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1}(x_0) = 0; \qquad f^{(n}(x_0) \neq 0$$

*Entonces, si $n$ es par y $f^{(n}(x_0) < 0$, la función presenta un máximo en $x_0$. Si $n$ es par y $f^{(n}(x_0) > 0$, la función presenta un mínimo en $x_0$.*

## 6.19. CONCAVIDAD Y CONVEXIDAD

● DEFINICIÓN 6.3 *Se dice que la función $f(x)$ es convexa en el intervalo $(a,b)$ si $\forall x_1, x_2 \in (a,b)$, el segmento rectilíneo que une los puntos $(x_1, f(x_1))$ y $(x_2, f(x_2))$, queda por encima de la gráfica de $f(x)$, (ver Figura 6.9).*

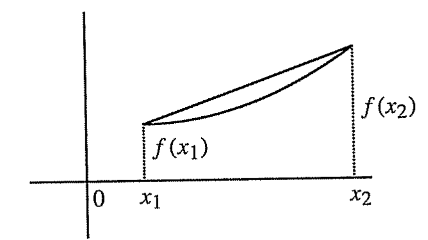



**Figura 6.9**

De modo análogo se define función *cóncava* (ver Figura 6.10).

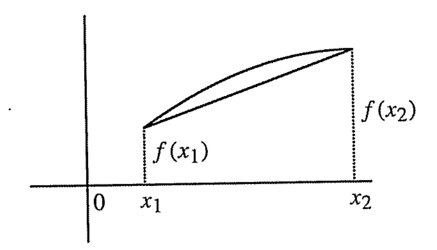



**Figura 6.10**

Si $f(x)$ es convexa en un intervalo $(a,b)$ y si $x_1, x_2 \in (a,b) \ / \ x_1 < x_2 \Longrightarrow f'(x_1) \leq f'(x_2)$, suponiendo que $f(x)$ es derivable en $(a,b)$. Esto es, el ángulo que forma la recta tangente en $x_1$ es menor que en $x_2$, debido a la convexidad de $f(x)$.

Si $f''(x) > 0$ en $(a,b)$, $f'(x)$ es estrictamente creciente en $(a,b)$ y $f(x)$ es convexa.

Del mismo modo, si $f''(x) < 0$ en $(a,b)$, $f'(x)$ es estrictamente decreciente en $(a,b)$ y $f(x)$ es cóncava.

## 6.20. PUNTOS DE INFLEXIÓN

Se dice que la función $f(x)$ presenta un *punto de inflexión* en $x_0$ si en dicho punto la función cambia de convexa a cóncava, o viceversa.

La condición necesaria para la existencia de inflexión en un punto $x_0$ es que sea $f''(x_0) = 0$. Sin embargo, no es condición suficiente. Por ejemplo, la función $f(x) = x^4$ verifica $f''(0) = 0$ y no presenta inflexión en $x = 0$. La condición suficiente la da el siguiente teorema:

■ TEOREMA 6.8 *Sea $f(x)$ derivable n veces en $x_0$ y:*

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1}(x_0) = 0; \quad f^{(n}(x_0) \neq 0$$

*Entonces, si n es impar, $f(x)$ presenta un punto de inflexión en $x_0$.*

**EJEMPLO 6.15** Sea $f(x) = x^3$. Haciendo $f'(x) = 3x^2 = 0 \Longrightarrow x = 0$; la segunda derivada: $f''(x) = 6x \Longrightarrow f''(0) = 0$; la tercera derivada: $f'''(x) = 6 \neq 0$. Así, en $x = 0$ presenta un punto de inflexión.

**EJEMPLO 6.16** Sea $f(x) = x^4$. La derivada: $f'(x) = 4x^3 = 0 \Longrightarrow x = 0$; la segunda derivada: $f''(x) = 12x^2 \Longrightarrow f''(0) = 0$; se acude a la tercera derivada: $f'''(x) = 24x \Longrightarrow f'''(0) = 0$; por último, a la cuarta derivada: $f^{IV}(x) = 24 > 0$. La función presenta un mínimo en $x = 0$.

## 6.21. REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE $y = f(x)$

El estudio y representación gráfica de una función explícita $y = f(x)$ se suele realizar siguiendo el siguiente orden para determinar:

1. Dominio de definición o campo de existencia.
2. Puntos de corte con los ejes de coordenadas.
3. Simetrías. Si la función es simétrica respecto al eje $OY$, entonces se verifica que $f(x) = f(-x)$, como se aprecia en la Figura 6.11. Entonces, $f(x)$ recibe el nombre de función *par*.

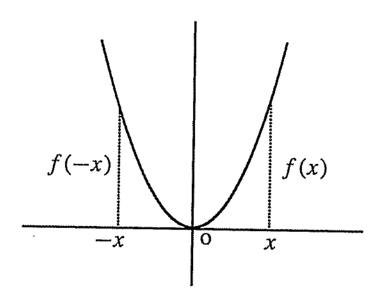



**Figura 6.11**

Si la función presenta simetría respecto al origen de coordenadas, entonces $f(x) = -f(-x)$, y recibe el nombre de función *impar* (ver Figura 6.12).

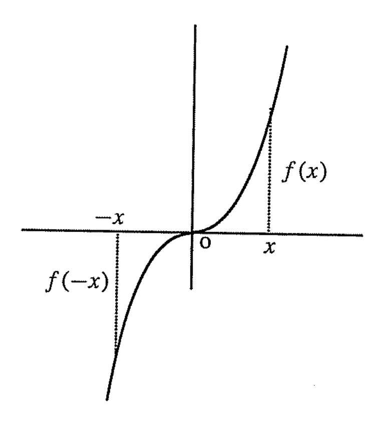



**Figura 6.12**

4. Crecimiento y decrecimiento.
5. Máximos y mínimos.
6. Concavidad y convexidad.
7. Puntos de inflexión.
8. Asíntotas, que se definen como las tangentes a la curva en el infinito. Pueden ser horizontales, verticales y oblícuas.

Las asíntotas horizontales tienen por ecuación $y = n$, siendo:

$$n = \lim_{x\to\infty} f(x)$$

Las verticales son de la forma $x = n$, siendo:

$$\lim_{x\to n} f(x) = \pm\infty$$

Si la función $f(x)$ es un cociente irreducible de dos polinomios, las asíntotas verticales están situadas en los ceros del denominador.

Las asíntotas oblícuas tienen por ecuación $y = mx + n$, siendo:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{y} \quad n = \lim_{x\to\infty} [f(x) - mx]$$

ya que dividiendo por $x$ los dos miembros de $y = mx + n$ resulta:

$$\frac{y}{x} = m + \frac{n}{x}$$

y cuando $x \to \infty$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{y}{x} = m$$

Despejando $n = y - mx$:

$$n = \lim_{x\to\infty} (y - mx)$$

# PROBLEMAS RESUELTOS

**6.1.** Hallar $y'$ en: a) $x^2y + xy^2 - y = 7$. b) $3xy^3 - y \cdot \operatorname{sen} x = 0$.

### Resolución

a) Derivando implícitamente:

$$2xy + x^2y' + y^2 + 2xyy' - y' = 0 \Longrightarrow y' = \frac{-2xy - y^2}{x^2 + 2xy - 1}$$

b) $3y^3 + 9xy^2y' - y' \cdot \operatorname{sen} x - y \cdot \cos x = 0 \Longrightarrow y' = \dfrac{y \cdot \cos x - 3y^3}{9xy^2 - \operatorname{sen} x}$

**6.2.** Comprobar que $y = x \cdot e^x$ satisface la ecuación diferencial $y'' - y' - e^x = 0$.

### Resolución

Se calcula la primera y segunda derivada de $y$:

$$y' = e^x + x \cdot e^x; \quad y'' = 2 \cdot e^x + x \cdot e^x$$

y se sustituye en la ecuación diferencial:

$$2e^x + x \cdot e^x - (e^x + x \cdot e^x) - e^x = 0$$

**6.3.** Derivar $x^y = y^{\operatorname{sen} x}$.

**Resolución**

Tomando logaritmos:

$$y \cdot \ln x = \operatorname{sen} x \cdot \ln y$$

Derivando:

$$y' \cdot \ln x + \frac{y}{x} = \cos x \cdot \ln y + \operatorname{sen} x \cdot \frac{y'}{y}$$

$$y' = \frac{xy \cdot \cos x \cdot \ln y - y^2}{xy \cdot \ln x - x \cdot \operatorname{sen} x}$$

**6.4.** Dada la función $f(x) = e^{x+3}$, comprobar que $\frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = 1$.

**Resolución**

$$\frac{dy}{dx} = e^{x+3}$$

Despejando $x$ en la función:

$$x = \ln y - 3$$

y derivando $x$ con respecto a $y$:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y} = \frac{1}{e^{x+3}}$$

Por tanto:

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = \frac{e^{x+3}}{e^{x+3}} = 1$$

**6.5.** Dada $f(x) = \frac{x+2}{x^2-1}$, verificar que $\frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = 1$.

**Resolución**

Derivando $y$ con respecto a $x$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x^2 - 4x - 1}{(x^2-1)^2}$$

Derivando $x$ con respecto a $y$:

$$1 = \frac{x'(x^2-1) - 2xx'(x+2)}{(x^2-1)^2}$$

Despejando $x'$:

$$x' = \frac{dx}{dy} = \frac{(x^2-1)^2}{-x^2 - 4x - 1}$$

Por tanto:

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = 1$$

**6.6.** Hallar la derivada $n$-ésima de las funciones:

a) $y = \cos x$.

b) $y = \dfrac{1}{x-5}$.

**Resolución**

a) Derivando sucesivamente:

$$\begin{aligned} y' &= -\operatorname{sen} x \\ y'' &= -\cos x \\ y''' &= \operatorname{sen} x \\ y^{IV} &= \cos x \\ y^{V} &= -\operatorname{sen} x \\ &\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

En general:

$$y^{(n} = \begin{cases} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \cdot \operatorname{sen} x & \text{si } n \text{ es impar} \\ (-1)^{\frac{n}{2}} \cdot \cos x & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

b) Derivando sucesivamente:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{-1}{(x-5)^2} \\ y'' &= \frac{2}{(x-5)^3} \\ y''' &= \frac{-2 \cdot 3}{(x-5)^4} \\ y^{IV} &= \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{(x-5)^5} \\ &\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

En general, $y^{(n} = (-1)^n \cdot \dfrac{n!}{(x-5)^{n+1}}$.

**6.7.** Hallar la derivada $n$-ésima de la función $y = \dfrac{1}{x^2 - 8x + 12}$.

**Resolución**

Antes de derivar, es conveniente hacer una descomposición en fracciones simples:

$$y = \frac{1}{x^2 - 8x + 12} = \frac{1}{(x-2)(x-6)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-6} = \frac{(A+B)x - 6A - 2B}{(x-2)(x-6)}$$

Entonces, $1 \equiv (A+B)x - 6A - 2B \Longrightarrow \left.\begin{aligned} A + B &= 0 \\ -6A - 2B &= 1 \end{aligned}\right\}$.

Resolviendo el sistema: $A = \dfrac{-1}{4}$; $B = \dfrac{1}{4}$.

Por tanto, $y = \dfrac{-1}{4(x-2)} + \dfrac{1}{4(x-6)}$.

Derivando sucesivamente:

$$y' = \frac{1}{4(x-2)^2} - \frac{1}{4(x-6)^2}$$
$$y'' = \frac{-2}{4(x-2)^3} + \frac{2}{4(x-6)^3}$$
$$y''' = \frac{2\cdot 3}{4(x-2)^4} - \frac{2\cdot 3}{4(x-6)^4}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

En general:

$$y^{(n} = (-1)^{n+1}\cdot\frac{n!}{4}\cdot\left[\frac{1}{(x-2)^{n+1}} - \frac{1}{(x-6)^{n+1}}\right]$$

**6.8.** Usando derivación implícita, hallar la pendiente de la recta tangente a la circunferencia:

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y - 11 = 0$$

en el punto de abscisa $x = 2$ y la ordenada positiva.

### Resolución

La ordenada para $x = 2$:

$$2^2 + y^2 - 4\cdot 2 + 2\cdot y - 11 = 0 \Longrightarrow y_1 = 3,\ \ y_2 = -5$$

El punto en cuestión es el $(2, 3)$. Derivando implícitamente:

$$2x + 2yy' - 4 + 2y' = 0$$

Sustituyendo el punto $(2, 3)$ en la derivada:

$$2\cdot 2 + 2\cdot 3\cdot y' - 4 + 2y' = 0 \Longrightarrow y' = 0$$

La ecuación de la recta tangente será:

$$y - 3 = 0(x-2) \Longrightarrow y = 3$$

que es una recta paralela al eje de abscisas.

**6.9.** Hallar las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva $x\cdot \text{sen}(xy) + 4y^2 = 16 + x$, en el punto de abscisa $x = 0$ y ordenada positiva.

### Resolución

Para $x = 0$:

$$0\cdot \text{sen}(0\cdot y) + 4y^2 = 16 + 0 \Longrightarrow y = \pm 2$$

Derivando:

$$\text{sen}(xy) + x(y + xy')\cdot\cos(xy) + 8yy' = 1$$

Sustituyendo el punto $(0, 2)$:

$$16y' = 1 \Longrightarrow y' = \frac{1}{16}$$

La ecuación de la recta tangente es: $y - 2 = \dfrac{1}{16}\cdot(x - 0)$.

La ecuación de la recta normal es: $y - 2 = -16(x - 0)$.

**6.10.** Hallar la ecuación de una parábola de la forma:

$$y = x^2 + bx + c$$

que sea tangente a la curva $y = (x-1)^3$ en el punto de abscisa $x = 1$.

### Resolución

Para $x = 1$, la función $y = (x-1)^3$ toma el valor cero. Por tanto, el punto de tangencia de ambas curvas es el $(1, 0)$.

Las derivadas de ambas funciones en $x = 1$:

$$y' = 2x + b \Longrightarrow y'(1) = 2 + b$$
$$y' = 3(x-1)^2 \Longrightarrow y'(1) = 0$$

Igualando: $2 + b = 0 \Longrightarrow b = -2$.

Y como la función $y = x^2 + bx + c$ pasa por el punto $(1, 0)$, se ha de verificar que $0 = 1 + b + c$, con lo que $c = 1$.

**6.11.** Determinar los puntos en los que la curva $y = x^3 + x^2 - 6x + 1$ tiene tangente paralela a la recta $y = 2x + 1$.

### Resolución

La pendiente de la recta $y = 2x - 1$ es $m = 2$. Derivando la función:

$$y' = 3x^2 + 2x - 6$$

Dicha derivada ha de ser igual a $m = 2$:

$$3x^2 + 2x - 6 = 2 \Longrightarrow x_1 = -2,\; x_2 = \frac{4}{3}$$

Los puntos son $(-2, 9)$ y $\left(\frac{4}{3}, -\frac{77}{27}\right)$.

**6.12.** Hallar las ecuaciones de las rectas tangentes a la función:

$$y = \ln\sqrt{\frac{x}{x+1}}$$

paralelas a la recta $x - 4y + 1 = 0$.

### Resolución

La derivada primera de la función:

$$y' = \frac{1}{2x(x+1)}$$

ha de ser igual a la pendiente de la recta $x - 4y + 1 = 0$. En forma explícita: $y = \frac{x}{4} + \frac{1}{4}$.

La pendiente es $m = \frac{1}{4}$. Por tanto:

$$\frac{1}{2x(x+1)} = \frac{1}{4} \Longrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Longrightarrow x = 1,\; x = -2$$

Para $x = 1$, $y = \ln\sqrt{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}\ \ln 2$. Para $x = -2$, $y = \ln\sqrt{2} = \frac{1}{2}\ \ln 2$.
Las rectas tangentes:

$$y + \frac{1}{2}\ \ln 2 = \frac{1}{4}\ (x-1)$$
$$y - \frac{1}{2}\ \ln 2 = \frac{1}{4}\ (x+2)$$

**6.13.** Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^x$ en el punto de abscisa $x = 1$.

### Resolución

$$y = x^x \Longrightarrow \ln y = x\ \ln x \Longrightarrow \frac{y'}{y} = \ln x + x\ \frac{1}{x} \Longrightarrow y' = x^x(\ln x + 1)$$

La pendiente de la recta tangente en el punto de abscisa $x = 1$ es:

$$m = 1\ (\ln 1 + 1) = 1$$

La recta tangente:

$$y - 1 = 1\ (x-1) \Longrightarrow y = x$$

**6.14.** ¿Bajo qué ángulo se cortan las curvas de ecuaciones $y = \operatorname{sen} x$ e $y = \cos x$?

### Resolución

Los puntos de corte de ambas funciones se obtienen resolviendo la ecuación:

$$\operatorname{sen} x = \cos x \Longrightarrow \operatorname{tg} x = 1 \Longrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}$$

El ángulo de corte de las dos curvas en $x = \frac{\pi}{4}$ es el de las rectas tangentes respectivas en dicho punto. Las pendientes en $x = \frac{\pi}{4}$:

$$y' = \cos x \Longrightarrow m_1 = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$y' = -\operatorname{sen} x \Longrightarrow m_2 = -\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Por último:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1.m_2} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}}{1 - \frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2}$$
$$\alpha = \operatorname{arc\,tg}\ 2\sqrt{2} = 70°31'43''6$$

**6.15.** El lado de un triángulo equilátero crece a razón de 5 cm por minuto. ¿Con qué velocidad crece su área cuando el lado mide 26 cm?

**Resolución**

El área $A$ de un triángulo equilátero en función de su lado $l$ es:

$$A = \frac{l^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

Se desea saber con qué velocidad $v = \dfrac{dA}{dt}$ crece $A$ en el instante en que $l = 26$ cm. Mediante la regla de la cadena:

$$v = \frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dl} \cdot \frac{dl}{dt} = 2l \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{dl}{dt}$$

Si $\dfrac{dl}{dt} = 5: \; v = 2 \cdot 26 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{4} \cdot 5 = 65\sqrt{3}\ \text{cm}^2/\text{min}.$

**6.16.** Las dimensiones de un depósito en forma de paralelepípedo son 8 m de largo, 2 m de ancho y 4 m de profundidad; se está llenando de agua a razón de 2 metros cúbicos por minuto. Hallar la variación de la altura del nivel del agua respecto al tiempo, en el instante en que la profundidad del líquido es de 1 m.

**Resolución**

Si la profundidad del agua es igual a $x$, el volumen de agua contenido en el depósito es:

$$V = 2 \cdot 8 \cdot x = 16x \Longrightarrow x = \frac{V}{16} \Longrightarrow \frac{dx}{dV} = \frac{1}{16}$$

Según la regla de la cadena:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dV} \cdot \frac{dV}{dt} = \frac{1}{16} \cdot 2 = \frac{1}{8}\ \text{m/min}$$

El nivel del agua aumenta de un modo constante, debido a la forma del depósito. Por otra parte, la profundidad del agua (4 m) es un dato innecesario.

**6.17.** ¿Con qué velocidad aumenta el área de un círculo en el instante en que su radio vale 10 cm, sabiendo que dicho radio crece uniformemente con velocidad igual a 2 cm por segundo?

**Resolución**

$$A = \pi \cdot r^2 \Longrightarrow \frac{dA}{dr} = 2\pi r$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dr} \cdot \frac{dr}{dt} = 2\pi r \cdot 2 = 4\pi r$$

Cuando $r = 10$ cm:

$$\frac{dA}{dt} = 4\pi \cdot 10 = 40\pi\ \frac{\text{cm}^2}{s}$$

**6.18.** Desde un mismo puerto salen simultáneamente dos barcos. El barco A, en dirección norte, y el barco B, en dirección este. ¿Con qué velocidad aumenta la distancia entre ellos si la velocidad del barco A es de 30 km/h y la del barco B es de 40 km/h?

**Resolución**

$$D = \sqrt{(30\,t)^2 + (40\,t)^2} = 50\,t$$
$$\frac{dD}{dt} = 50 \text{ km/h}$$

**6.19.** Calcular $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x + \operatorname{sen}^2 x}{1 - \cos x}$.

**Resolución**

Sustituyendo infinitésimos equivalentes y aplicando L'Hopital:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x + \operatorname{sen}^2 x}{1 - \cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{x + \operatorname{sen}^2 x}{\frac{x^2}{2}} = \lim_{x \to 0} \frac{1 + 2 \operatorname{sen} x \cdot \cos x}{x} = \frac{1}{0} = \infty$$

**6.20.** Calcular $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \operatorname{ctg} x\right)$.

**Resolución**

Es una indeterminación de la forma $\infty - \infty$. Pasando a la forma $\frac{0}{0}$, sustituyendo infinitésimos equivalentes y aplicando L'Hopital:

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{tg} x}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x \cdot \operatorname{tg} x} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x \cdot x}$$
$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - 1}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{2 \cdot \operatorname{sen} x \cdot \cos x}{\cos^4 x}}{2} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^3 x} = 0$$

**6.21.** Calcular $\lim\limits_{x \to 0} x^x$.

**Resolución**

$A = \lim\limits_{x \to 0} x^x$. Tomando logaritmos:

$$\ln A = \lim_{x \to 0} x \cdot \ln x = 0 \cdot (-\infty)$$

Se transforma en una indeterminación de la forma $\frac{\infty}{\infty}$ y se aplica L'Hopital:

$$\ln A = \lim_{x \to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0} (-x) = 0 \Longrightarrow A = e^0 = 1$$

● NOTA *Comprobarlo con la calculadora, dando a x valores próximos a cero: x=0,01, x=0,001, etc.*

**6.22.** Calcular $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\operatorname{ctg} x}$.

**Resolución**

Es una indeterminación de la forma $1^{\infty}$. Tomando logaritmos naturales:

$$A=\lim_{x\to 0}(1-x)^{\operatorname{ctg} x}\Longrightarrow \ln A=\lim_{x\to 0}\operatorname{ctg} x\cdot\ln(1-x)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-x)}{\operatorname{tg} x}=\frac{0}{0}$$

Aplicando L'Hopital:

$$\ln A=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{-1}{1-x}}{\dfrac{1}{\cos^2 x}}=\frac{-1}{1}=-1\Longrightarrow A=e^{-1}=\frac{1}{e}$$

**6.23.** Calcular $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1+\ln(\cos x)}{1+\operatorname{tg} x}$.

**Resolución**

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1+\ln(\cos x)}{1+\operatorname{tg} x}=\frac{1+\ln 0}{1+\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}}=\frac{\infty}{\infty}$$

Aplicando L'Hopital:

$$\ln A=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\dfrac{-\operatorname{sen} x}{\cos x}}{\dfrac{1}{\cos^2 x}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}-\operatorname{sen} x\ \cos x=-1\cdot 0=0$$

**6.24.** Calcular $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\cos x+e^x}{\operatorname{sen} x+e^x}$.

**Resolución**

Es una indeterminación de la forma $\dfrac{\infty}{\infty}$. Aplicando L'Hopital:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-\operatorname{sen} x+e^x}{\cos x+e^x}=\frac{\infty}{\infty}$$

Aplicando L'Hopital reiteradamente, permanece la indeterminación. L'Hopital no es aplicable en este caso. Dividiendo por $e^x$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{\cos x}{e^x}+1}{\dfrac{\operatorname{sen} x}{e^x}+1}=1$$

ya que $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ son funciones acotadas, y $e^x\to\infty$ cuando $x\to\infty$.

**6.25.** Representar la función:

$$f(x)=\begin{cases}\operatorname{sen} x & \text{si } \dfrac{-\pi}{2}\le x\le\pi\\ x-\pi & \text{si } \pi<x\le 6\end{cases}$$

Estudiar su continuidad y derivabilidad en $x=\pi$.

**Resolución**

Las derivadas laterales en $x = \pi$ son:

$$f'_+(\pi) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\pi+h) - f(\pi)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(\pi+h) - \pi - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1$$

$$f'_-(\pi) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\pi-h) - f(\pi)}{-h} = \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(\pi-h) - 0}{-h} = \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{-h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{-h} = -1$$

No es derivable en $x = \pi$. Las derivadas laterales no coinciden (ver Figura 6.13).

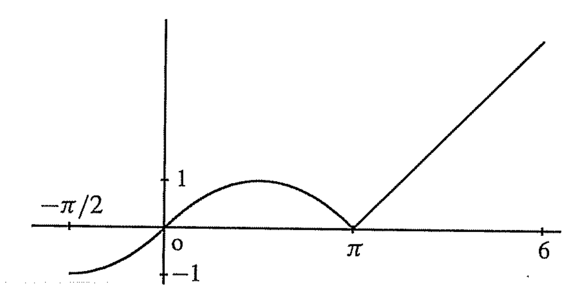



**Figura 6.13**

Continuidad en $x = \pi$:

1) $f(\pi) = \operatorname{sen} \pi = 0$.

2) $\lim_{x\to\pi^+} f(x) = \lim_{h\to 0} f(\pi+h) = \lim_{h\to 0} (\pi + h - \pi) = 0$.

$\lim_{x\to\pi^-} f(x) = \lim_{h\to 0} f(\pi-h) = \lim_{h\to 0} \operatorname{sen}(\pi - h) = 0$.

Por tanto, $\lim_{x\to\pi} f(x) = 0 = f(\pi)$, lo que implica que $f(x)$ es continua en $x = \pi$.

**6.26.** Estudiar la derivabilidad de la función:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 0 \\ \ln x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

en el punto de abscisa $x = 0$.

**Resolución**

Continuidad de la función en $x = 0$:

1) $f(0) = 0$.

2) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{h\to 0} f(0+h) = \lim_{h\to 0} \ln(0+h) = -\infty$.

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{h\to 0} f(0-h) = \lim_{h\to 0} (0-h) = 0$.

La función presenta una discontinuidad esencial en $x = 0$, por tanto, no es derivable en dicho punto (ver Figura 6.14).

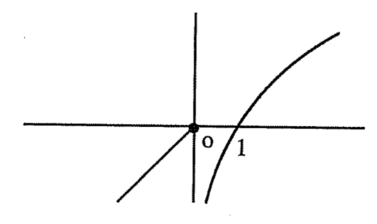



**Figura 6.14**

**6.27.** Escribir sin valores absolutos la función $f(x) = |3^x - 3|$, representarla gráficamente, y estudiar su derivabilidad y continuidad en $x = 1$.

### Resolución

$$3^x - 3 \geq 0 \Longrightarrow 3^x \geq 3 \Longrightarrow x \geq 1$$

Por tanto, $x \geq 1 \Longrightarrow |3^x - 3| = 3^x - 3$. Si $x < 1$, $|3^x - 3| = -(3^x - 3) = -3^x + 3$.
La función puede reescribirse así:

$$f(x) = \begin{cases} 3^x - 3 & \text{si } x \geq 1 \\ -3^x + 3 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

Derivabilidad en $x = 1$:

$$f'_+(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3^{1+h} - 3}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3(3^h - 1)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3(h \cdot \ln 3)}{h} = 3 \cdot \ln 3, \quad \text{ya que } 3^h - 1 \approx h \cdot \ln 3$$

$$f'_-(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1-h) - f(1)}{-h} = \lim_{h \to 0} \frac{-3^{1-h} + 3}{-h} = -3 \cdot \ln 3$$

No es derivable en $x = 1$, ya que $f'_+(1) \neq f'_-(1)$ (ver Figura 6.15).

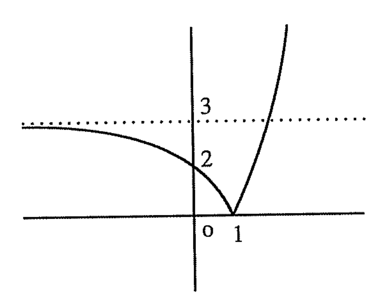



**Figura 6.15**

Continuidad en $x = 1$:

1) $f(1) = 0$.

2) $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{h \to 0} f(1+h) = \lim_{h \to 0} (3^{1+h} - 3) = 0$.

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{h \to 0} f(1-h) = \lim_{h \to 0} (-3^{1-h} + 3) = 0$.

La función posee límite en $x = 1$.

3) $\lim_{x \to 1} f(x) = f(1) = 0 \Longrightarrow f(x)$ es continua en $x = 1$.

**6.28.** Estudiar la derivabilidad y continuidad de $f(x) = x - E(x)$ para los valores enteros de $x$.

### Resolución

Sea $a \in \mathbb{Z}$:

1) $f(a) = a - E(a) = a - a = 0$.

2) $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{h\to 0} f(a+h) = \lim_{h\to 0}(a+h) - E(a+h) = a - a = 0.$

$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{h\to 0} f(a-h) = \lim_{h\to 0}(a-h) - E(a-h) = a - (a-1) = 1.$

Es discontinua de una unidad de salto para $a \in \mathbb{Z}$. Como no es continua, tampoco es derivable en $a \in \mathbb{Z}$ (ver Figura 6.16).

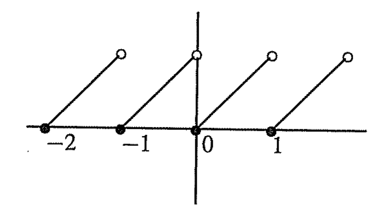



**Figura 6.16**

**6.29.** Estudiar la continuidad y derivabilidad, en $x = 0$ y $x = -1$, de la función:

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{si } 0 \le x < \pi \\ -x^3 & \text{si } 0 > x > -1 \\ -3x - 2 & \text{si } -1 \ge x \end{cases}$$

### Resolución

Derivabilidad en $x = 0$:

$$f'_+(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(0+h) - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1$$

$$f'_-(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0-h) - f(0)}{-h} = \lim_{h\to 0} \frac{-(0-h)^3 - 0}{-h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^3}{-h} = 0$$

No es derivable en $x = 0$.

Continuidad en $x = 0$:

1) $f(0) = 0.$

2) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{h\to 0} f(0+h) = \lim_{h\to 0} \operatorname{sen}(0+h) = 0.$

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{h\to 0} f(0-h) = \lim_{h\to 0} -(0-h)^3 = 0.$

La función posee límite en $x = 0$.

3) $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0 \Longrightarrow f(x)$ es continua en $x = 0$.

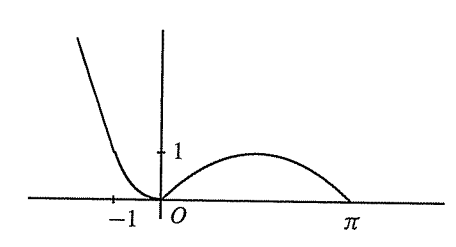



**Figura 6.17**

Derivabilidad en $x = -1$:

$$f'_{+}(-1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-(-1+h)^3 - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-3h + 3h^2 - h^3}{h} = -3$$

$$f'_{-}(-1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(-1-h) - f(-1)}{-h} = \lim_{h\to 0} \frac{-3(-1-h) - 2 - 1}{-h} = \lim_{h\to 0} \frac{3h}{-h} = -3$$

Es derivable en $x = -1$. Es continua por ser derivable en $x = -1$ (ver Figura 6.17).

**6.30.** Sabiendo que $\ln 13 = 2{,}565$, calcular el valor aproximado de $\ln 13{,}1$.

### Resolución

Sea $y = \ln x \Longrightarrow dy = \frac{1}{x} \cdot dx$.

En $x = 13$: $dy = \frac{1}{13}\, 0{,}1 = 0{,}0077$.

$\ln 13{,}1 = \ln 13 + 0{,}0077 = 2{,}565 + 0{,}0077 = 2{,}5727$.

**6.31.** Sabiendo que $\operatorname{arc\,sen} 0{,}7 = 0{,}7754$, calcular $\operatorname{arc\,sen} 0{,}72$.

### Resolución

Se considera la función $y = \operatorname{arc\,sen}\ x$. Su diferencial: $dy = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx$.

En $x = 0{,}7$: $dy = \frac{1}{\sqrt{1-(0{,}7)^2}}\, 0{,}02 = 0{,}028$.

$\operatorname{arc\,sen} 0{,}72 = \operatorname{arc\,sen} 0{,}7 + 0{,}028 = 0{,}7754 + 0{,}028 = 0{,}8034$.

**6.32.** El radio de una esfera mide 10 cm. Si dicho radio aumenta 1 mm, ¿cuánto aumenta su volumen?

### Resolución

$V = f(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 \Longrightarrow dV = 4\pi r^2 dr; \quad dV = 4\pi \cdot 10^2 \cdot 0{,}1 = 125{,}66\ \text{cm}^3$

**6.33.** Hallar el valor de n para que la función $y = \frac{nx-1}{x-2}$ sea creciente.

### Resolución

Para que la función sea creciente, la derivada primera ha de ser positiva:

$$y' = \frac{n(x-2) - (nx-1)}{(x-2)^2} = \frac{-2n+1}{(x-2)^2} > 0 \Longrightarrow -2n > -1 \Longrightarrow 2n < 1 \Longrightarrow n < \frac{1}{2}$$

ya que $(x-2)^2 > 0$ para todo valor de $x$, $x \neq 2$.

**6.34.** Estudiar y representar gráficamente la función $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$.

### Resolución

1. *Dominio.* No está definida en $x = 1$, ya que se anula el denominador. El dominio es $\mathbb{R} - \{1\}$.

2. *Puntos de corte con los ejes.* Si $x = 0$, $f(x) = 0$. Si $f(x) = 0$, se tiene $x^2 = 0$, siendo $x = 0$ una raíz doble.
3. *Simetrías:* $f(-x) = \dfrac{x^2}{-x-1}$. Ya que $f(x) \neq f(-x)$ y $f(x) \neq -f(-x)$, no es ni par ni impar.
4. *Crecimiento y decrecimiento.* Si la primera derivada es positiva, la función es estrictamente creciente:

$$f'(x) = \frac{2x(x-1)-x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2} > 0 \Longrightarrow x^2 - 2x > 0$$

ya que el denominador es siempre positivo. Resolviendo la anterior inecuación, resulta que $f(x)$ es estrictamente creciente para $x \in (-\infty, 0) \cup (2, \infty)$; decrece en el intervalo $(0, 2) - \{1\}$.

5. *Máximos y mínimos.* La primera derivada es:

$$f'(x) = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2} = 0 \Longrightarrow x^2 - 2x = 0 \Longrightarrow x = 0,\ x = 2$$

La segunda derivada es:

$$f''(x) = \frac{(2x-2)(x-1)^2 - 2(x-1)(x^2-2x)}{(x-1)^4} = \frac{2}{(x-1)^3}$$

Se tiene que $f''(0) < 0$, $f''(2) > 0$. La función presenta un máximo en $x = 0$ y un mínimo en $x = 2$. Sustituyendo estos valores en $f(x)$: el máximo se encuentra en $(0, 0)$ y el mínimo, en $(2, 4)$.

6. *Concavidad y convexidad.* Si la segunda derivada es mayor que cero, la función es convexa:

$$f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3} > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

Es convexa para $x \in (1, \infty)$ y cóncava para $x \in (-\infty, 1)$.

7. *Puntos de inflexión.* Carece de ellos, puesto que:

$$f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3} \neq 0$$

8. *Asíntotas.* En $x = 1$ la función presenta una asíntota vertical, ya que $\lim_{x\to 1} f(x) = \infty$.

Por otra parte:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2}{x-1}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2 - x} = 1$$

$$n = \lim_{x\to\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x-1} = 1$$

La función presenta una asíntota oblícua en $y = x + 1$.

Por último, su representación gráfica:

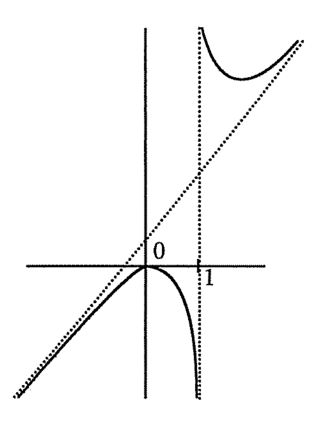



**Figura 6.18**

**6.35.** Estudiar y representar la función $f(x) = \dfrac{1}{e^x - 1}$.

## Resolución

1. *Dominio de definición.* La función no existe si $e^x - 1 = 0 \Longrightarrow e^x = 1 \Longrightarrow x = 0$, por tanto, el dominio es $\mathbb{R} - \{0\}$.
2. *Puntos de corte con los ejes.* No hay puntos de corte.
3. *Simetrías.* $f(-x) = \dfrac{1}{e^{-x} - 1} \Longrightarrow f(x) \neq f(x),\ \ f(-x) \neq -f(x)$; no es par ni impar.
4. *Crecimiento y decrecimiento.* La primera derivada de la función es: $f'(x) = \dfrac{-e^x}{(e^x - 1)^2} < 0$. El denominador está elevado al cuadrado y es siempre positivo, el numerador es negativo para todo valor de $x$, por tanto, es decreciente $\forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$.
5. *Máximos y mínimos.* No hay máximos ni mínimos, ya que la primera derivada no se anula para ningún valor de $x$.
6. *Concavidad y convexidad.* La segunda derivada es:

$$f''(x) = \frac{-e^x(e^x - 1)^2 + 2e^{2x}(e^x - 1)}{(e^x - 1)^4} = \frac{e^{2x} + e^x}{(e^x - 1)^3}$$

   El numerador es positivo y el denominador lo es si $e^x - 1 > 0 \Longrightarrow e^x > 1 \Longrightarrow x > 0$. Por tanto, es convexa en el intervalo $(0, \infty)$ y cóncava en $(-\infty, 0)$.
7. No hay *puntos de inflexión*, ya que $f''(x) \neq 0$ para todo valor de $x$.
8. Presenta *asíntota vertical* en $x = 0$, ya que para $x = 0$ se anula el denominador.
   Presenta *asíntota horizontal* en $y = 0$ e $y = -1$, ya que:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{e^x - 1} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{e^x - 1} = -1$$

Su gráfica:

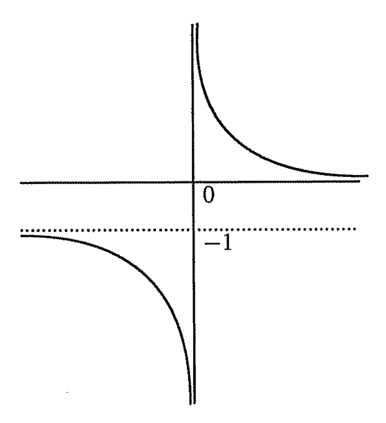



**Figura 6.19**

**6.36.** Hallar los catetos del triángulo rectángulo de área máxima, entre todos aquéllos que tienen hipotenusa igual a 20 cm.

## Resolución

El área de un triángulo rectángulo de catetos $a$ y $b$ es igual a:

$$S = \frac{ab}{2}$$

y como $a^2 + b^2 = 20^2 \Longrightarrow S = \dfrac{a\sqrt{20^2 - a^2}}{2}$.

Se ha obtenido $S$ en función de $a$. Se ha de hallar el valor de $a$ para el que $S$ alcanza su valor máximo. Para ello, se halla $S'$ y se iguala a cero:

$$S' = \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{20^2 - a^2} + a \cdot \frac{-2a}{2 \cdot \sqrt{20^2 - a^2}}\right) = 0$$

$$20^2 - a^2 - a^2 = 0 \Longrightarrow a = \sqrt{200}\ \text{cm}$$

$$b = \sqrt{20^2 - 200} = \sqrt{200}\ \text{cm}$$

Para comprobar que se trata de un máximo, se puede acudir a la segunda derivada y ver que, efectivamente, $S'(\sqrt{200}) < 0$.

**6.37.** La base menor de un trapecio rectángulo mide 3 cm y el lado oblicuo 6 cm. Hallar el ángulo que debe formar dicho lado con la base mayor para que el área sea máxima.

### Resolución

El área del trapecio es:

$$S = \frac{x + 3 + 3}{2} \cdot h = \frac{x + 6}{2} \cdot h$$

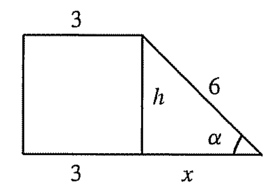



**Figura 6.20**

Escribiendo $x$ y $h$ en función del ángulo $\alpha$ (ver Figura 6.20):

$$S = \frac{6\ \cos\alpha + 6}{2}\ 6\ \operatorname{sen}\alpha$$

ya que $h = 6\ \operatorname{sen}\alpha$ y $x = 6\ \cos\alpha$.

Derivando e igualando a cero:

$$S' = 18\,[-\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha + \cos\alpha] = 18(2\ \cos^2\alpha + \cos\alpha - 1) = 0 \Longrightarrow \alpha = 60^\circ$$

Para verificar el resultado se acude a la segunda derivada:

$$S'' = 18(-4 \cdot \cos\alpha \cdot \operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\alpha); \qquad S''(60^\circ) < 0$$

**6.38.** Una estatua de 4 m de alto está situada sobre una base de 3 m de altura. ¿A qué distancia, desde el suelo horizontal, se verá dicha estatua bajo un ángulo máximo?

### Resolución

En la Figura 6.21:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}; \qquad \frac{7}{x} = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \dfrac{3}{x}}{1 - \dfrac{3}{x} \cdot \operatorname{tg}\alpha}$$

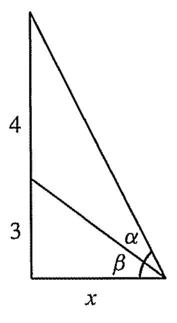



**Figura 6.21**

Despejando $\alpha$, derivando e igualando a cero:

$$\alpha = \operatorname{arc\,tg} \frac{4x}{21+x^2} \Longrightarrow \alpha' = \frac{\dfrac{4(21+x^2)-8x^2}{(21+x^2)^2}}{1+\left(\dfrac{4x}{21+x^2}\right)^2} = 0$$

$$\Longrightarrow 4(21+x^2) - 8x^2 = 0 \Longrightarrow x = \sqrt{21} \text{ m}$$

**6.39.** Un canal de agua tiene una desviación en ángulo recto. El ancho del canal es de 5 metros y el de la desviación es de 3 metros. Hallar la longitud máxima de un tronco que, flotando en el canal, pueda tomar la desviación.

**Resolución**

Sea $l = a + b$ la longitud total del tronco. Por semejanza de triángulos (ver Figura 6.22):

$$\frac{a}{3} = \frac{b}{\sqrt{b^2-5^2}}$$

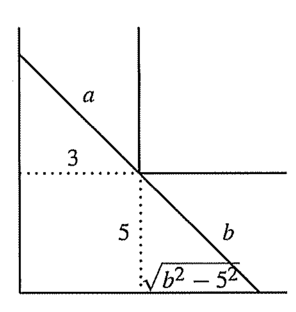



**Figura 6.22**

$$l = a + b = \frac{3b}{\sqrt{b^2-5^2}} + b$$

$$l' = \frac{3\cdot\sqrt{b^2-5^2} - 3b\dfrac{b}{\sqrt{b^2-5^2}}}{b^2-5^2} + 1 = \frac{3\cdot(b^2-5^2)-3b^2}{(b^2-5^2)\cdot\sqrt{b^2-5^2}} + 1 = 0$$

$$\Longrightarrow -75 + (b^2-5^2)\cdot\sqrt{b^2-5^2} = 0 \Longrightarrow (b^2-5^2)^3 = 75^2 \Longrightarrow b = \sqrt{25+\sqrt[3]{75^2}} = 6.54 \text{ m}$$

$a = 4{,}65$ m

$l = a + b = 11{,}19$ m

**6.40.** Dos ciudades A y B distan 4 y 7 km, respectivamente, de una línea de ferrocarril rectilínea. Sabiendo que la distancia entre ambas es de 5 km, hallar el lugar de la línea donde debe situarse una estación para que la longitud de las carreteras a construir sea mínima.

### Resolución

El lugar estará situado a $x$ km del pie de la perpendicular trazada desde la ciudad A a la línea férrea. La longitud de la proyección del segmento $\overline{AB}$ sobre la línea férrea es igual a 4 km (ver Figura 6.23):

$$\sqrt{5^2 - 3^2} = 4$$

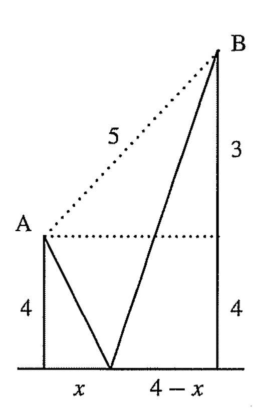



**Figura 6.23**

La longitud total de las dos carreteras:

$$l = \sqrt{4^2 + x^2} + \sqrt{7^2 + (4 - x)^2}$$

Derivando e igualando a cero:

$$l' = \frac{2x}{2 \cdot \sqrt{16 + x^2}} - \frac{2(4 - x)}{2 \cdot \sqrt{7^2 + (4 - x)^2}} = 0$$

Despejando $x$:

$$x = 1{,}45 \text{ km}$$

# PROBLEMAS PROPUESTOS

**6.41.** Hallar, mediante límite de cociente de incrementos, la derivada de las funciones:

a) $f(x) = \sqrt{2x - 1}$.

b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 3}$.

**6.42.** Hallar la derivada de:

a) $y = \operatorname{sen} x^2$.

b) $y = \operatorname{sen}^2 x$.

c) $y = \operatorname{sen}^2 x^2$.

**6.43.** Hallar la derivada de $y = (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{tg} x}$.

**6.44.** Hallar la derivada de $x^y - y^x = 0$.

**6.45.** Hallar la derivada $n$-ésima de $y = \dfrac{1}{x+2}$.

**6.46.** Hallar la derivada $n$-ésima de $y = \dfrac{1}{x^2 - 5x + 6}$.

**6.47.** Hallar la derivada $n$-ésima de $y = \dfrac{2x+1}{x^2 - 3x + 2}$.

**6.48.** Hallar la derivada $n$-ésima de $y = \operatorname{sen} 4x$.

**6.49.** Derivar implícitamente $y^2 \cdot x = x^2 \cdot y$.

**6.50.** Derivar implícitamente $xy^2 = x \cdot \operatorname{arc\,sen}\, y$.

**6.51.** Derivar implícitamente $(xy)^{\operatorname{sen} x} = y^x$.

**6.52.** Comprobar si la función $y = e^{ax}$ satisface la ecuación diferencial $y'' - 2ay' + a^2 y = 0$.

**6.53.** Comprobar si $y = \sqrt{(1+x^2)^n}$ satisface la ecuación diferencial $(1+x^2)y'' + xy' - n^2 y = 0$.

**6.54.** Comprobar si $y = \operatorname{sen}(\ln x)$ satisface la ecuación diferencial $x^2 y'' + xy' + y = 0$.

**6.55.** Hallar $a$ y $b$ en la ecuación diferencial $y'' + ay' + by = 0$, sabiendo que $y = e^{-x} + 2e^{-2x}$ verifica dicha ecuación.

**6.56.** Hallar la derivada de $y = \dfrac{x^2 - 1}{2x+1}$ con respecto a la variable $u = e^{\operatorname{tg} x}$.

**6.57.** Dadas $x = \arccos \dfrac{b + a \cdot \cos t}{a + b \cdot \cos t}$ e $y = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2} \cdot \operatorname{sen} t}{b + a \cdot \cos t}$, hallar $\dfrac{dy}{dx}$.

**6.58.** Dada la función $y = 4. \ln(x^2 + 1)$, comprobar que $\dfrac{dy}{dx} \cdot \dfrac{dx}{dy} = 1$.

**6.59.** Hallar el ángulo que forman las curvas de ecuación $y^2 - 4x = 0$ y $2x^2 + 5y = 12$, en el punto $(1, 2)$.

**6.60.** Demostrar que la parábola:

$$y = a(x - x_1)(x - x_2),\ a > 0,\ x_1 < x_2$$

corta el eje OX bajo ángulos $\alpha$ y $\beta$ $\left(\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi,\ 0 < \beta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ que son suplementarios.

**6.61.** ¿Cómo debe elegirse el parámetro $n$ para que la curva de ecuación $y = \operatorname{arc\,tg}\, nx$, $n > 0$, corte el eje OX bajo un ángulo mayor que 89°?

**6.62.** Hallar el límite, cuando $n \to \infty$, de la ordenada de la función $y = x^n$, correspondiente al punto de intersección de la tangente en $A(1, 1)$ con el eje de abscisas.

**6.63.** Hallar los puntos en los que las tangentes a las funciones $y = 2x^2$ e $y = x^4$ son paralelas.

**6.64.** Hallar las longitudes de la subtangente y subnormal a la función $f(x) = 2x^2$, en $x = 1$.

**6.65.** Hallar la ecuación de la recta tangente a $y = x^2 + 4x + 5$, que pasa por el origen de coordenadas.

**6.66.** Demostrar que la ecuación de la recta tangente a la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, en el punto $(x_0, y_0)$, es $\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$.

**6.67.** Demostrar que la función $f(x) = m \cdot e^{nx}$ tiene subtangente constante.

**6.68.** En un triángulo rectángulo, el cateto $b$ mide 50 cm; el cateto $c$ disminuye con una velocidad de 2 cm/s. ¿Con qué velocidad decrece la hipotenusa en el instante en que $c = 24$ cm?

**6.69.** De un globo esférico escapa el aire con una velocidad de 10 $\text{cm}^3/\text{s}$. Cuando el radio del globo es de 50 cm:

a) ¿Con qué rapidez está disminuyendo dicho radio?
b) ¿Con qué rapidez está disminuyendo la superficie del globo?

**6.70.** Una escalera de mano de 4 m de largo está apoyada en el suelo horizontal y en un muro vertical. Suponiendo que el pie de la escalera se separa del muro vertical a razón de 20 m por minuto:

a) ¿Con qué velocidad desciende el extremo superior cuando el pie está a 3 m del muro vertical?
b) ¿En qué instante el pie y el extremo superior se están desplazando con la misma velocidad?
c) ¿En qué instante el extremo superior desciende con una velocidad de 40 m por minuto?

**6.71.** Un punto se mueve con velocidad constante sobre la curva $y = 3x^2 - 2x + 1$. Cuando $x = 1$, la abscisa del punto está variando a razón de 0,6 unidades por segundo. ¿Con qué velocidad varía la ordenada en ese instante?

**6.72.** Un punto se mueve con velocidad constante sobre la curva $y = 6x^2 - 3x + 2$. ¿En qué punto de la curva la abscisa y la ordenada del punto están variando con la misma rapidez?

**6.73.** Un punto se mueve sobre la curva $y = \frac{3}{x+1}$, desplazándose su abscisa con una velocidad constante de 2 unidades por segundo. ¿Con qué velocidad se está moviendo su ordenada al pasar por el punto (2, 1)?

**6.74.** Un punto se mueve sobre la curva $y = x^2$, con velocidad constante. ¿En qué lugar de la curva están aumentando con igual velocidad la abscisa y la ordenada de dicho punto?

**6.75.** Calcular $a$ y $b$ para que la función $f(x) = \begin{cases} 2x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ ax + b & \text{si } x > 1 \end{cases}$ sea derivable.

**6.76.** Estudiar la derivabilidad y continuidad, en $x = 0$, de la función $f(x) = \begin{cases} e^x - 1 & \text{si } x \geq 0 \\ x^3 & \text{si } x < 0. \end{cases}$

**6.77.** Estudiar la derivabilidad y continuidad, en $x = 0$, para $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{si } x \geq 0 \\ 2x & \text{si } x < 0. \end{cases}$

**6.78.** Utilizando el concepto de diferencial, hallar, aproximadamente, $\sqrt{10}$.

**6.79.** Hallar, aproximadamente, utilizando el concepto de diferencial, el incremento del volumen de una esfera de 10 dm de radio, cuando dicho radio aumenta 3 mm.

**6.80.** Dada la función $f(x) = \sqrt{4x - x^2}$, ¿es aplicable el teorema de Rolle en el intervalo $[0, 4]$? En caso afirmativo, hallar el valor de $\alpha$.

**6.81.** Comprobar el teorema del valor medio para $f(x) = x^2 - 3x + 2$, en el intervalo $[2, 3]$.

Calcular los siguientes límites:

**6.82.** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x \cdot \operatorname{sen} x}{1 - \cos x}$.

**6.83.** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3}{x - \operatorname{sen} x}$.

**6.84.** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{2x} - 1}{x \cdot e^{2x} - e^{2x} - x + 1}$.

**6.85.** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{e^x - e^{-x}}$.

**6.86.** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos \frac{x}{2} - 1}{x - \ln(1 + x)}$.

**6.87.** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^{\operatorname{sen} x}}{x - \operatorname{sen} x}$.

**6.88.** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1 + x + x^2) + \ln(1 - x + x^2)}{x(e^x - 1)}$.

**6.89.** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\dfrac{2}{\operatorname{sen}^2 x}}{\dfrac{1}{1 - \cos x}}$.

**6.90.** $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x^3 - x^2 - x + 1}$.

**6.91.** $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} (\sec x - \operatorname{tg} x)$.

**6.92.** $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{x^2 + 7} - 4}{x - 3}$.

**6.93.** $\lim\limits_{x \to 0} (1 - 2x - x^3)^{\frac{1}{x}}$.

**6.94.** $\lim\limits_{x \to 0} (1 + \operatorname{sen} x)^{\operatorname{cosec} \frac{x}{2}}$.

**6.95.** $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{x^2 + 1}{x + 1}\right)^{\frac{1}{x-1}}$.

**6.96.** $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{2}{x - 1} - \dfrac{x - 3}{x^2 - 1}\right)$.

**6.97.** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}}{3x}$.

**6.98.** $\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-3x-5}{x^2-4x+2}\right)^{\frac{x^2+5}{x+2}}$.

Estudiar y representar las funciones:

**6.99.** $f(x)=\dfrac{x^2}{(x+1)^2}$.

**6.100.** $f(x)=\dfrac{x}{x^2+4}$.

**6.101.** $f(x)=x+\operatorname{sen}x$.

**6.102.** $f(x)=\ln\dfrac{x+1}{x-1}$.

**6.103.** $f(x)=x+e^x$.

**6.104.** $f(x)=\ln(\operatorname{sen}x)$.

**6.105.** $f(x)=2x^2+|x|+1$.

**6.106.** $f(x)=|x^2-9|+|x|$.

**6.107.** Determinar los valores de $a$ para los que $f(x)=\dfrac{1-ax}{2-x}$ es decreciente.

**6.108.** ¿Es cóncava o convexa la función $f(x)=\dfrac{x+a}{x-a}$ en $x=2a$?

**6.109.** Determinar el punto más próximo al punto $(0,6)$ de la función $f(x)=2x^2$.

**6.110.** Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(3,2)$ y determina con los ejes de coordenadas un triángulo de area mínima en el primer cuadrante.

**6.111.** Dado un semicírculo de 6 cm de radio, hallar las dimensiones del mayor rectángulo que se puede inscribir en él.

**6.112.** Hallar las dimensiones del cilindro de mayor volumen que se puede inscribir en un cono de 3 m de radio y 7 m de altura.

**6.113.** Hallar las dimensiones del cilindro de mayor superficie lateral que se puede inscribir en una esfera de 10 cm de radio.

**6.114.** En un triángulo se conoce el ángulo $\alpha$ y se sabe que los lados contiguos a dicho ángulo suman 20 cm. Hallar la longitud de estos lados de forma que el área del triángulo sea máxima.

**6.115.** Determinar un punto de la recta $y=2x$, tal que la suma de los cuadrados de las distancias de dicho punto a los puntos $A(-5,0)$, $B(5,0)$ y $C(0,c)$ sea mínima.

**6.116.** Determinar un punto de la recta $y=2x+1$, tal que la suma de los cuadrados de las distancias de dicho punto a las rectas $y=x+3$ e $y=3x-5$ sea mínima.

**6.117.** Se tiene un rectángulo de 12 cm de perímetro. Sobre sus lados se trazan cuatro semicircunferencias exteriores a él. Hallar la superficie total mínima de la figura obtenida.

**6.118.** Hallar los máximos y mínimos de la función:

$$f(x) = \frac{(x-m)(x-n)}{x}$$

**6.119.** Hallar las dimensiones del cilindro circular recto de mayor volumen que se puede inscribir en una esfera de 10 cm de radio.

**6.120.** Hallar las dimensiones del triángulo isósceles de mayor área entre todos los de perímetro igual a $L$.

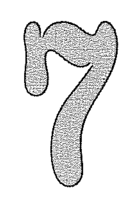
**6.121.** Un espejo plano, de dimensiones $80 \times 90$ cm, se rompe por una esquina. De los dos trozos resultantes, el menor tiene forma de triángulo rectángulo, de catetos 10 y 12 cm, correspondientes a las dimensiones menor y mayor del espejo. Hallar el área máxima del espejo rectangular que se puede construir con el trozo mayor.

**6.122.** Una esfera de radio $R$ está inscrita en un cono de revolución. ¿Cuál ha de ser el ángulo del vértice del cono para que su superficie total sea mínima?

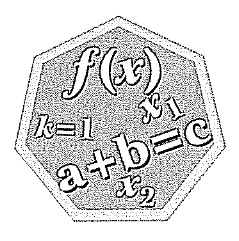
**6.123.** Un barco está situado a 9 km de la orilla rectilínea. Se quiere enviar un mensajero a un campamento situado en la orilla a 18 km del barco. Teniendo en cuenta que el mensajero recorre 4 km por hora remando y 5 km por hora andando, hallar a qué punto de la orilla debe dirigirse para llegar al campamento lo antes posible.

**6.124.** Una ventana tiene forma de rectángulo, con un semicírculo en la parte superior. Sabiendo que el perímetro de la ventana es de 4 m, hallar las dimensiones de la ventana de mayor superficie.

**6.125.** Una empresa fabrica un artículo que vende a 400 euros la unidad. El coste total para colocar en el mercado $x$ unidades de dicho artículo viene dado por la función $f(x) = 0{,}02x^2 - 160x + 400.000$. ¿Cuántos artículos será preciso vender para obtener un beneficio máximo?



CAPÍTULO 7



# APROXIMACIÓN LOCAL DE UNA FUNCIÓN



En algunas ocasiones se trabaja con funciones que sería conveniente sustituir por otras funciones más sencillas (por ejemplo, un polinomio), y tales que su diferencia con las anteriores en un entorno de un punto sea evaluable y lo más pequeña posible. Es decir, dada una función $f(x)$, se buscará un polinomio $P(x)$ tal que, en un entorno de un punto dado $a$, se pueda sustituir $f(x)$ por $P(x)$, cometiendo un pequeño error medible.

## 7.1. DESARROLLO DE UN POLINOMIO EN POTENCIAS DE $x - a$

Sea el polinomio $P_n(x)$ de grado $n$. Desarrollado en potencias de $x - a$ tiene la forma:

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + a_3(x-a)^3 + \cdots + a_n(x-a)^n \quad (I)$$

Derivando sucesivamente $P_n(x)$:

$$P_n'(x) = a_1 + 2a_2(x-a) + 3a_3(x-a)^2 + \cdots + na_n(x-a)^{n-1}$$
$$P_n''(x) = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3(x-a) + \cdots + n(n-1)a_n(x-a)^{n-2}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$P_n^{(n}(x) = n!a_n$$

Para $x = a$:

$$P_n(a) = a_0$$
$$P_n'(a) = a_1$$
$$P_n''(a) = 2a_2$$
$$P_n'''(a) = 3 \cdot 2a_3$$
$$\cdots\cdots$$
$$P_n^{(n}(x) = n!a_n$$

Despejando $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ y sustituyendo en $P_n(x)$:

$$P_n(x) = P_n(a) + \frac{P_n'(a)}{1!}(x-a) + \frac{P_n''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{P_n^{(n}(a)}{n!}(x-a)^n$$

que es la llamada *fórmula de Taylor* para polinomios.

**Ejemplo 7.1** Desarrollar en potencias de $x-2$ el polinomio $P(x)=x^3+3x^2-3$.

$$\begin{aligned} P(2) &= 2^3+3{,}2^2-3=17 \\ P'(x) &= 3x^2+6x \Longrightarrow P'(2)=3\cdot 2^2+6\cdot 2=24 \\ P''(x) &= 6x+6 \Longrightarrow P''(2)=6\cdot 2+6=18 \\ P''(x) &= 6 \Longrightarrow P''(2)=6 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} P(x) &= 17+\frac{24}{1!}(x-2)+\frac{18}{2!}(x-2)^2+\frac{6}{3!}(x-2)^3 \\ &= 17+24(x-2)+9(x-2)^2+(x-2)^3 \end{aligned}$$

## 7.2. FÓRMULAS DE TAYLOR Y MAC-LAURIN

La función $f(x)$ admite derivadas hasta el orden $n+1$ en el punto $x=a$ y se desea hallar un polinomio $P_n(x)$, con el mayor "parecido" posible a $f(x)$ en un entorno de dicho punto, para así poder sustituir $f(x)$ por $P_n(x)$.

Se supone que $P_n(x)$, desarrollado en potencias de $x-a$, es de la forma vista anteriormente (I):

$$P_n(x)=a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+a_3(x-a)^3+\cdots+a_n(x-a)^n$$

Para lograr el mayor "parecido" posible entre $P_n(x)$ y $f(x)$, en $x=a$, la primera condición es que $P_n(a)=f(a)$, lógicamente. Además, se hará coincidir las derivadas primeras, segundas, terceras, etc., con este fin.

Procediendo del mismo modo que en la sección anterior:

$$\begin{aligned} P_n(a) &= a_0 = f(a) \\ P_n'(a) &= a_1 = f'(a) \\ P_n''(a) &= 2a_2 = f''(a) \\ P_n'''(a) &= 3\cdot 2a_3 = f'''(a) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ P_n^{(n}(x) &= n!\, a_n = f^{(n}(a) \end{aligned}$$

Despejando $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$, y sustituyendo en $P_n(x)$:

$$P_n(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n}(a)}{n!}(x-a)^n$$

que es el *polinomio de Taylor* de orden $n$ de la función $f(x)$ en el punto $x=a$.

Se define el *resto* o *término complementario* de orden $n$ de la función $f(x)$ en el punto $x=a$ como:

$$R_{n+1}(x)=\frac{f^{(n+1}(\alpha)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},\ con\ \alpha\in(a,x)$$

$R_{n+1}(x)$ expresa el error cometido, en un punto $x$, al sustituir la función $f(x)$ por $P_n(x)$. Se puede escribir:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n}(a)}{n!}(x-a)^n+R_{n+1}(x)$$

Si $a = 0$, el desarrollo anterior recibe el nombre de *fórmula de McLaurin*:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\,x + \frac{f''(0)}{2!}\,x^2 + \cdots + \frac{f^{(n}(0)}{n!}\,x^n + R_{n+1}(x)$$

siendo:

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1}(\theta x)}{(n+1)!}\,x^{n+1}, \text{ con } 0 < \theta < 1$$

de modo que $\theta x$ está comprendido entre 0 y $x$.

**EJEMPLO 7.2** Desarrollar $f(x) = e^x$ mediante la fórmula de McLaurin, para $n = 2$ y $n = 3$.

$$f(x) = e^x \implies f(0) = e^0 = 1$$
$$f'(x) = e^x \implies f'(0) = e^0 = 1$$

Sustituyendo en la fórmula de McLaurin:

$$P_1(x) = 1 + \frac{1}{1!}x = 1 + x$$
$$P_2(x) = 1 + \frac{1}{1!}\,x + \frac{1}{2!}\,x^2 = 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

Representando gráficamente $f(x)$, $P_1(x)$ y $P_2(x)$, se aprecia la aproximación:

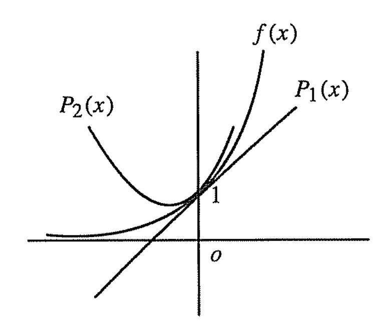



**Figura 7.1**

En general:

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_{n+1}(x)$$

siendo $R_{n+1}(x) = \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}\,e^{\theta x}$, con $0 < \theta < 1$.

# PROBLEMAS RESUELTOS

**7.1.** Desarrollar $f(x) = \operatorname{sen} x$ mediante la fórmula de McLaurin, para $n = 5$.

**Resolución**

$$\begin{array}{lll} f(x) = \operatorname{sen} x & \Longrightarrow & f(0) = \operatorname{sen} 0 = 0 \\ f'(x) = \cos x & \Longrightarrow & f'(0) = \cos 0 = 1 \\ f''(x) = -\operatorname{sen} x & \Longrightarrow & f''(0) = -\operatorname{sen} 0 = 0 \\ f'''(x) = -\cos x & \Longrightarrow & f'''(0) = -\cos\ 0 = -1 \\ f^{IV}(x) = \operatorname{sen} x & \Longrightarrow & f(0) = \operatorname{sen}\ 0 = 0 \\ f^{V}(x) = \cos x & \Longrightarrow & f(0) = \cos 0 = 1 \\ f^{VI}(x) = -\operatorname{sen}\ x & & \end{array}$$

A continuación, se hallan $P_1(x)$, $P_3(x)$ y $P_5(x)$, ya que $P_2(x)$ y $P_4(x)$ coinciden con $P_1(x)$ y $P_3(x)$ por ser nulas las derivadas respectivas (ver Figura 7.2):

$$P_1(x) = 0 + \frac{1}{1!}x = x$$

$$P_3(x) = 0 + \frac{1}{1!}x + 0 - \frac{1}{3!}x^3 = x - \frac{x^3}{6}$$

$$P_5(x) = 0 + \frac{1}{1!}x + 0 - \frac{1}{3!}x^3 + 0 + \frac{1}{5!}x^5 = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$

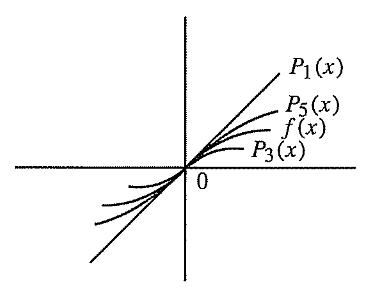



**Figura 7.2**

El desarrollo de McLaurin para $n = 5$ es:

$$f(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{\operatorname{sen}\theta x}{6!}x^6$$

con $\theta \in (0, 1)$.

**7.2.** Hallar el desarrollo de McLaurin de orden $n$ para la función $f(x) = (1 + x)^m$.

**Resolución**

$$\begin{array}{lll} f(0) = 1 & & \\ f'(x) = m(1+x)^{m-1} & \Longrightarrow & f'(0) = m \\ f''(x) = m(m-1)(1+x)^{m-2} & \Longrightarrow & f''(0) = m(m-1) \\ f'''(x) = m(m-1)(m-2)(1+x)^{m-3} & \Longrightarrow & f'''(0) = m(m-1)(m-2) \\ \cdots\cdots\cdots & & \\ f^{(n}(x) = m(m-1)\ldots(m-n+1)(1+x)^{m-n} & \Longrightarrow & f^{(n}(0) = m(m-1)\ldots(m-n+1) \end{array}$$

El desarrollo de McLaurin:

$$f(x) = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + R_{n+1}(x)$$
$$= \binom{m}{0} + \binom{m}{1}x + \binom{m}{2}x^2 + \cdots + \binom{m}{n}x^n + R_{n+1}(x)$$

siendo:

$$R_{n+1}(x) = \binom{m}{n+1}(1+\theta x)^{m-n-1}x^{n+1}$$

**7.3.** Hallar el desarrollo de McLaurin para $f(x) = \ln(1+x)$.

### Resolución

$$f(0) = \ln 1 = 0$$
$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \implies f'(0) = 1$$
$$f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} \implies f''(0) = -1$$
$$f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3} \implies f'''(0) = 2$$
$$f^{IV}(x) = -\frac{3!}{(1+x)^4} \implies f^{IV}(0) = -3!$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f^{(n}(x) = (-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n} \implies f^{(n}(0) = (-1)^{n+1}(n-1)!$$

Entonces:

$$\ln x = 0 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + R_{n+1}(x)$$

siendo:

$$R_{n+1}(x) = \frac{n!}{(1+\theta x)^{n+1}} \cdot (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}$$

y $\theta \in (0, 1)$.

**7.4.** Hallar el desarrollo de orden dos en un entorno de $\frac{\pi}{4}$, para $f(x) = \operatorname{tg} x$.

### Resolución

$$f(x) = \operatorname{tg} x \implies f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$$
$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \implies f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$$
$$f''(x) = \frac{2 \cdot \operatorname{sen} x}{\cos^3 x} \implies f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4$$

Aplicando la fórmula de Taylor:

$$\operatorname{tg} x = 1 + \frac{2}{1!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{4}{2!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{2 \cdot \cos^2\alpha + 6 \cdot \operatorname{sen}^2\alpha}{3! \cdot \cos^4\alpha}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3$$

con $\pi/4 < \alpha < x$.

**7.5.** En el desarrollo de McLaurin de $f(x) = e^{ax}$ aparece un término igual a $36x^3$. Calcular $a$.

**Resolución**

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{ax} & \Longrightarrow \quad f(0) &= 1 \\ f'(x) &= a \cdot e^{ax} & \Longrightarrow \quad f'(0) &= a \\ f''(x) &= a^2 \cdot e^{ax} & \Longrightarrow \quad f''(0) &= a^2 \\ f'''(x) &= a^3 \cdot e^{ax} & \Longrightarrow \quad f'''(0) &= a^3 \end{aligned}$$

Por tanto:

$$e^{ax} = 1 + \frac{a}{1!}x + \frac{a^2}{2!}x^2 + \frac{a^3}{3!}x^3 + \dots$$

y

$$\frac{a^3}{3!} = 36 \Longrightarrow a = 6$$

**7.6.** Hallar $\cos \pi/12$, con un error menor que $10^{-3}$, utilizando la fórmula de McLaurin.

**Resolución**

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos x & \Longrightarrow \quad f(0) &= 1 \\ f'(x) &= -\operatorname{sen} x & \Longrightarrow \quad f'(0) &= 0 \\ f''(x) &= -\cos x & \Longrightarrow \quad f''(0) &= -1 \\ f'''(x) &= \operatorname{sen} x & \Longrightarrow \quad f'''(0) &= 0 \\ f^{IV}(x) &= \cos x & \Longrightarrow \quad f^{IV}(0) &= 1 \\ &\dots\dots\dots & & \end{aligned}$$

El desarrollo de McLaurin:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

El error ha de ser menor que una milésima: $10^{-3} = 0{,}001$. Tomando una cifra decimal más, es decir, cuatro cifras decimales, y tomando términos del desarrollo hasta que se anulen dichas cuatro cifras:

$$\cos \frac{\pi}{12} = 1 - 0{,}0342 + 0{,}0002 - 0{,}0000 + \cdots = 0{,}9659$$

Directamente, con la calculadora, resulta 0,9659258.

**7.7.** Hallar $\ln 1{,}3$, con un error menor que $10^{-2}$, utilizando la fórmula de McLaurin, para $f(x) = \ln(1+x)$.

**Resolución**

Como se ha visto en un ejercicio anterior:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

Tomando $x = 0{,}3$ y tres cifras decimales, ya que el error ha de ser menor que $10^{-2} = 0{,}01$:

$$\ln(1+0{,}3) = 0{,}3 - 0{,}045 + 0{,}009 - 0{,}002 + 0{,}000 - \cdots = 0{,}262$$

**7.8.** Dada la función $f(x) = 10x^{40} - 3x^{30} + x^{10}$, hacer un desarrollo en serie de potencias de $x - 1$ y hallar $f(1{,}001)$ con un error menor que $10^{-2}$.

### Resolución

$$\begin{array}{lcl} f(x) = 10x^{40} - 3x^{30} + x^{10} & \Longrightarrow & f(1) = 8 \\ f'(x) = 400x^{39} - 90x^{29} + 10x^9 & \Longrightarrow & f'(1) = 320 \\ f''(x) = 15600x^{38} - 2610x^{28} + 90x^8 & \Longrightarrow & f''(1) = 13080 \\ f'''(x) = 592800x^{37} - 73080x^{27} + 720x^7 & \Longrightarrow & f'''(1) = 520440 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & & \end{array}$$

El desarrollo de McLaurin:

$$f(x) = 8 + \frac{320}{1!}(x-1) + \frac{13080}{2!}(x-1)^2 + \frac{520440}{3!}(x-1)^3 + \dots$$

Se toman tres cifras decimales, como se hizo en el ejercicio anterior, puesto que el error ha de ser menor que $10^{-2} = 0{,}01$:

$$f(1{,}001) = 8 + 0{,}320 + 0{,}007 + 0{,}000 + \cdots = 8{,}327$$

**7.9.** Calcular sen 0,3 mediante la fórmula de McLaurin. Acotar el error cometido al tomar los siete primeros términos del desarrollo.

### Resolución

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{|\operatorname{sen}(\theta x)|}{8!}x^8$$

con $0 < \theta < 1$.

$$\operatorname{sen} 0{,}3 = 0{,}3 - \frac{0{,}3^3}{3!} + \frac{0{,}3^5}{5!} - \frac{0{,}3^7}{7!} = 0{,}295520206$$

El error cometido:

$$\epsilon = \frac{0{,}3^8}{8!}|\operatorname{sen}(0{,}3\theta)|$$

y como $|\operatorname{sen}(0{,}3\,\theta)| \leq 1$:

$$\epsilon < \frac{0{,}3^8}{8!} = 0{,}0000000016$$

**7.10.** Utilizando un desarrollo en serie, calcular el valor de $e^{0{,}2}$ para $n = 3$ y acotar el error cometido.

### Resolución

$$\begin{array}{lcl} f(x) = e^x & \Longrightarrow & f(0) = 1 \\ f'(x) = e^x & \Longrightarrow & f'(0) = 1 \\ f''(x) = e^x & \Longrightarrow & f''(0) = 1 \\ f'''(x) = e^x & \Longrightarrow & f'''(0) = 1 \end{array}$$

Por tanto:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + R_4(x)$$

con:

$$R_4(x) = \frac{e^{\theta x}}{4!}\, x^4; \qquad 0 < \theta < 1$$

En el intervalo (0, 0.2), 2 es una cota superior de $f(x)$:

$$R_4(x) < \frac{2 \cdot (0{,}2)^4}{4!} = 0{,}000133333\ldots$$

siendo:

$$e^{0{,}2} = 1 + 0{,}2 + \frac{(0{,}2)^2}{2!} + \frac{(0{,}2)^3}{3!} = 1{,}221333333\ldots$$

**7.11.** Calcular, mediante un desarrollo en serie, el siguiente límite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{e - e^{\cos x}}$$

### Resolución

Desarrollando en serie de McLaurin $e^{\cos x}$:

$$\begin{aligned}
f(x) &= e^{\cos x} && \Longrightarrow \quad f(0) = e \\
f'(x) &= -\operatorname{sen} x \cdot e^{\cos x} && \Longrightarrow \quad f'(0) = 0 \\
f''(x) &= \operatorname{sen}^2 x \cdot e^{\cos x} - \cos x \cdot e^{\cos x} && \Longrightarrow \quad f''(0) = -e \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Por tanto:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{e - \left(e - \dfrac{e}{2!}x^2 + \ldots\right)} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{\dfrac{e}{2!}x^2 - \ldots} = \frac{2}{e}$$

**7.12.** Calcular, mediante un desarrollo en serie, la integral:

$$\int_0^{0{,}5} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx$$

### Resolución

Desarrollando en serie $\operatorname{sen} x$:

$$\int_0^{0{,}5} \frac{x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \ldots}{x}\, dx = \int_0^{0{,}5} \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \ldots\right) dx$$

$$= \left[x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} + \frac{x^7}{7 \cdot 7!} + \ldots\right]_0^{0{,}5} = 0{,}4993553\ldots$$

**7.13.** Resolver la ecuación $\cos x = x$.

**Resolución**

Desarrollando $\cos x$ en serie de McLaurin:

$$1 - \frac{x^2}{2} = x \Longrightarrow x^2 + 2x - 2 = 0 \Longrightarrow x = -1 + \sqrt{3}$$

Se ha tomado:

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$$

por motivos de sencillez en los cálculos. La solución obtenida ha sido $x = -1 + \sqrt{3} = 0{,}732050\ldots$ La solución verdadera es $x = 0{,}739085\ldots$

**7.14.** Hallar una función $f(x)$, tal que $f(0) = 1$ y $f'(x) = f(x) + x$.

**Resolución**

$$\begin{aligned} f'(0) &= f(0) + 0 = 1 + 0 = 1 \\ f''(x) &= f'(x) + 1 \Longrightarrow f''(0) = f'(0) + 1 = 1 + 1 = 2 \\ f'''(x) &= f''(x) \Longrightarrow f'''(0) = f'(0) = 2 \\ f^{(n}(0) &= 2 \quad \forall n \geq 2 \end{aligned}$$

Desarrollando por McLaurin:

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + x + \frac{2x^2}{2!} + \frac{2x^3}{3!} + \frac{2x^4}{4!} + \ldots \\ &= -1 - x + 2\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots\right) = -1 - x + 2e^x \end{aligned}$$

ya que:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

# PROBLEMAS PROPUESTOS

**7.15.** Desarrollar, en potencias de $x - 1$, el polinomio $P(x) = x^4 - 1$.

Desarrollar en serie de McLaurin las funciones siguientes:

**7.16.** $f(x) = a^x$.

**7.17.** $f(x) = \operatorname{arc\,sen} x$.

**7.18.** $f(x) = \arccos x$.

**7.19.** $f(x) = \operatorname{arc\,tg} x$.

**7.20.** $f(x) = \sec x$.

**7.21.** $f(x) = \ln(\cos x)$.

**7.22.** $f(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$.

**7.23.** Obtener los cuatro primeros términos del desarrollo de $\ln x$, en potencias de $x-2$.

**7.24.** Obtener los ocho primeros términos del desarrollo de $e^x$, en potencias de $x-1$.

**7.25.** Desarrollar en serie, mediante la fórmula de McLaurin, la función $f(x)=(x+3)e^{2x}$, hasta el orden 3.

**7.26.** Hacer un desarrollo de $f(x)=\sqrt{x}$, en potencias de $x-1$.

**7.27.** Hallar una cota del error cometido al calcular $\cos 0{,}1$, a partir del desarrollo de McLaurin para $n=7$.

**7.28.** Hallar el valor de $a$ para que en el desarrollo de la función $y^3-axy-8=0$, en un entorno de cero, aparezca un término igual a:

$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3!}$$

**7.29.** Verificar la fórmula aproximada:

$$\ln(10+x)=2{,}3+\frac{x}{10}$$

Comparar los resultados obtenidos con la fórmula anterior para $x=-0{,}3$, utilizando la calculadora.

**7.30.** Calcular, mediante desarrollos en serie, el límite:

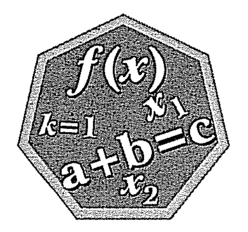
$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\cos x-e^x}$$

**7.31.** Calcular, mediante un desarrollo en serie, el límite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+\cos\ x-1}{x}$$

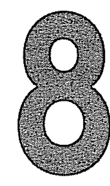
**7.32.** Calcular, mediante un desarrollo en serie, la integral:

$$\int_0^{0{,}5} e^{-x^2}\,dx$$



CAPÍTULO

# LA INTEGRAL INDEFINIDA





La integración es uno de los conceptos más importantes del Cálculo. Es la operación inversa de la diferenciación y surge de la necesidad de hallar el área limitada por una curva. En este capítulo, dada la diferencial de una función, se estudiarán diversos métodos para hallar dicha función.

## 8.1. INTRODUCCIÓN

Sea la expresión:

$$\frac{dF(x)}{dx} = 4x - 12 \quad \text{o bien:} \quad dF(x) = (4x - 12)\,dx$$

Si se desea hallar la función $F(x)$, se encuentran infinitas soluciones:

$$F(x) = 2x^2 - 12x$$
$$F(x) = 2x^2 - 12x + 5$$
$$F(x) = 2x^2 - 12x - 7$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Se deduce de lo anterior que $F(x)$ ha de ser $F(x) = 2x^2 - 12x + C$, siendo $C$ una constante.

En general, si $f(x)$ está definida en un intervalo $(a, b)$ y:

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$$

en $(a, b)$, se dice que $F(x)$ es una *primitiva* de $f(x)$ y se escribe en la forma:

$$F(x) = \int f(x)\,dx$$

En la función del ejemplo anterior:

$$\int (4x - 12)\,dx = 2x^2 - 12x + C$$

en donde $C$ recibe el nombre de *constante de integración*.

■ PROPOSICIÓN 8.1 *Si $F_1(x)$ y $F_2(x)$ son primitivas de $f(x)$, entonces $F_1(x)$ y $F_2(x)$ se diferencian en una constante.*

DEMOSTRACIÓN. En efecto:

$$\frac{dF_1(x)}{dx} = f(x); \quad \frac{dF_2(x)}{dx} = f(x) \Longrightarrow \frac{dF_1(x)}{dx} - \frac{dF_2(x)}{dx} = 0$$
$$\Longrightarrow \frac{d[F_1(x) - F_2(x)]}{dx} = 0$$
$$\Longrightarrow F_1(x) - F_2(x) = C$$
$$\Longrightarrow F_1(x) = F_2(x) + C \; ■$$

Por lo tanto, si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$, todas las primitivas de $f(x)$ son de la forma:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

El conjunto de las funciones de la forma $F(x) + C$ recibe el nombre de *integral indefinida* de $f(x)$.

## 8.2. PROPIEDADES ELEMENTALES

1. La integral de una suma de funciones es igual a la suma de las integrales respectivas:

$$\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

2. La integral del producto de una constante por una función es igual al producto de la constante por la integral de la función:

$$\int k \cdot f(x)\,dx = k \int f(x)\,dx$$

## 8.3. TABLA DE INTEGRALES

Mediante la regla de la cadena y las fórmulas de derivación, se obtiene la tabla siguiente:

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad (n \neq -1)$$

$$\int f'(x)[f(x)]^n\,dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int f'(x)\,\text{sen}[f(x)]\,dx = -\cos\,[f(x)] + C$$

$$\int f'(x)\cos[f(x)]\,dx = \text{sen}[f(x)] + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$$

$$\int f'(x)e^{f(x)}\,dx = e^{f(x)} + C$$

$$\int f'(x)a^{f(x)}\,dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln\,a} + C \qquad (a > 0,\ a \neq 1)$$

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1 - [f(x)]^2}}\,dx = \text{arc sen}\ f(x) + C$$

$$\int \frac{-f'(x)}{\sqrt{1 - [f(x)]^2}}\,dx = \text{arc cos}\ f(x) + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{1 + [f(x)]^2}\,dx = \text{arc tg}\ f(x) + C$$

$$\int \frac{1}{t^2+a^2} = \frac{1}{a}\ \text{arc tg}\ \frac{t}{a}$$

## 8.4. INTEGRACIÓN POR SUSTITUCIÓN

Si se desea calcular una integral $\int f(x)\, dx$, puede ocurrir que la sustitución $x = u(t)$ transforme dicha integral en otra más sencilla de calcular. En efecto, si $x = u(t) \Longrightarrow dx = u'(t)\, dt$, y entonces:

$$\int f(x)\, dx = \int f[u(t)]\, u'(t)\, dt$$

Integral que, una vez hallada la primitiva en función de la variable $t$, puede escribirse en función de $x$ hallando la función inversa de $x = u(t)$.

**EJEMPLO 8.1** Sea $\int \sqrt{1-x^2}\, dx$. Mediante el cambio $x = \operatorname{sen} t \Longrightarrow dx = \cos t\, dt$:

$$\int \sqrt{1-x^2}\, dx = \int \cos^2 t\, dt = \int \frac{1+\cos 2t}{2}\, dt = \frac{t}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2t}{4} + C$$
$$= \frac{t}{2} + \frac{\operatorname{sen} t \cdot \cos t}{2} + C = \frac{\operatorname{arc\,sen} x}{2} + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + C$$

## 8.5. INTEGRACIÓN POR PARTES

Sean las funciones $u(x)$ y $v(x)$, derivables en el intervalo $(a, b)$. La función $u(x) \cdot v(x)$ será derivable en $(a, b)$:

$$d(uv) = u\, dv + v\, du$$

Integrando los dos miembros:

$$uv = \int u\, dv + \int v\, du \Longrightarrow \int u\, dv = uv - \int v\, du$$

que es la fórmula de la *integración por partes*.

**EJEMPLO 8.2** Calcular $\int x \cdot \ln x\, dx$.

Se eligen convenientemente $u$ y $dv$:

$$u = \ln x \quad \Longrightarrow \quad du = \frac{dx}{x}$$
$$dv = x\, dx \quad \Longrightarrow \quad v = \frac{x^2}{2}$$

Por tanto:

$$\int x \cdot \ln x\, dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}\, dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x}{2}\, dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C$$

## 8.6. INTEGRACIÓN DE FUNCIONES RACIONALES

Para obtener la primitiva de una función racional $P(x)/Q(x)$, donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios de grados $m$ y $n$ respectivamente, se procede del modo siguiente:

1. Si $m \geq n$, se efectua la división entre $P(x)$ y $Q(x)$, obteniéndose:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

siendo $C(x)$ y $R(x)$ los polinomios cociente y resto de la división de $P(x)$ entre $Q(x)$. A la función racional $R(x)/Q(x)$ se le aplica el procedimiento expuesto a continuación, dado que el grado de $R(x)$ es menor que el grado de $Q(x)$.

2. Si $m < n$, se consideran cuatro casos:

a. El polinomio $Q(x)$ tiene $n$ raíces reales distintas: $x_1, \ldots, x_n$. En este caso, se efectua una descomposición en fracciones simples:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{x - x_2} + \ldots + \frac{A_n}{x - x_n}$$

en donde $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n$ son números reales que se pueden calcular sumando las fracciones anteriores e identificando los coeficientes de las potencias de igual grado de los numeradores del primer y segundo miembro.
De este modo, aparecen integrales muy sencillas, de la forma:

$$\int \frac{A}{x-k}\, dx = A \cdot \ln |x - k| + C$$

b. Si el polinomio $Q(x)$ tiene una raíz $x_1$, de orden de multiplicidad $r$, se efectua una descomposición de la forma:

$$\frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{(x - x_1)^2} + \frac{A_3}{(x - x_1)^3} + \ldots + \frac{A_r}{(x - x_1)^r}$$

y los coeficientes $A_1,\ A_2,\ A_3,\ \ldots,\ A_r$ se hallan del modo antes expuesto.
Si $Q(x)$, además de la raíz múltiple $x_1$, posee raíces simples, éstas se tratan del modo expuesto en el apartado a.

c. Si en el denominador $Q(x)$ aparece un factor de la forma $ax^2 + bx + c$, que no posee raíces reales, se toma una fracción de la forma:

$$\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}$$

y se calculan $A$ y $B$ de modo análogo a como se hizo anteriormente.

d. Si en $Q(x)$ aparece un factor $(ax^2 + bx + c)^r$, donde $ax^2 + bx + c$ no posee raíces reales, se toma una suma de fracciones de la forma:

$$\frac{A_1x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \ldots + \frac{A_rx + B_r}{(ax^2 + bx + c)^r}$$

## 8.7. MÉTODO DE HERMITE

Se suele emplear cuando las raíces de $Q(x)$ son múltiples (especialmente si son complejas). El integrando se descompone de la forma:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{d}{dx}\left[\frac{q(x)}{Q^*(x)}\right] + \frac{c(x)}{C(x)}$$

donde $Q^*(x)$ es el máximo común divisor de $Q(x)$ y de su derivada $Q'(x)$. El polinomio $q(x)$, con coeficientes indeterminados, tiene su grado inferior en una unidad a $Q^*(x)$. Por último, $C(x) = Q(x)/Q^*(x)$, y $c(x)$ es un polinomio con coeficientes indeterminados y grado inferior en una unidad a $C(x)$.

Se deriva $q(x)/Q^*(x)$, se hallan los coeficientes indeterminados y se obtiene:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx = \frac{q(x)}{Q^*(x)} + \int \frac{c(x)}{C(x)}\, dx$$

El problema se reduce al cálculo de esta última integral.

## 8.8. INTEGRACIÓN DE FUNCIONES RACIONALES TRIGONOMÉTRICAS

Las integrales de la forma:

$$\int R(\operatorname{sen} x, \cos x)\, dx$$

donde $R(\operatorname{sen} x, \cos x)$ es una función racional de $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$, se pueden resolver mediante el cambio $x = 2 \cdot \operatorname{arc\,tg} t$.

Escribiendo $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ en función de $t$:

$$\operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2}; \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

La diferencial es:

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

que se sustituye en la integral y el integrando se transforma en una función racional en la variable $t$. Por último, se escribe la primitiva en función de $x$ haciendo $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

## 8.9. INTEGRALES IRRACIONALES

a. Si en el integrando aparece la expresión $\sqrt{a^2 + b^2x^2}$, se hace el cambio $x = \frac{a}{b} \operatorname{tg} t$, resultando:

$$\sqrt{a^2 + a^2 \operatorname{tg}^2 t} = a \cdot \sec t$$

b. Si en el integrando aparece la expresión $\sqrt{a^2 - b^2x^2}$, se hace el cambio $x = \frac{a}{b} \operatorname{sen} t$, resultando:

$$\sqrt{a^2 - a^2 \operatorname{sen}^2 t} = a \cdot \cos t$$

c. Si en el integrando aparece la expresión $\sqrt{bx^2 - a^2}$, se hace el cambio $x = \frac{a}{b} \sec t$, resultando:

$$\sqrt{a^2 \sec^2 t - a^2} = a \cdot \operatorname{tg} t$$

d. Si aparece la expresión $\sqrt{x^2 + bx + c}$, se hace $\sqrt{x^2 + bx + c} = t - x$ y se transforma en una integral racional.
e. Si aparece la expresión $\sqrt{-x^2 + bx + c} = \sqrt{(\alpha + x)(\beta - x)}$, se hace $-x^2 + bx + c = (\alpha + x)^2 t^2$ y se transforma en una integral racional.

## 8.10. INTEGRALES BINOMIAS

Son de la forma $\int x^m (a + bx^n)^p dx$, siendo $a, b \in \mathbb{R}$ y $m, n, p \in \mathbb{Q}$, distintos de cero.
Mediante el cambio $x^n = t$ y se obtiene una integral de la forma

$$\frac{1}{n} \int t^q (a + bt)^p \, dt$$

en la que si:

a. $p$ es un número entero positivo, se desarrolla $(a + bx^n)^p$ y se obtiene una suma de integrales inmediatas.
b. $q$ es un número entero y $p = r/s$ racional, se hace el cambio $a + bt = z^s$.
c. $p$ y $q = r/s$ son números racionales pero $p + q$ es entero, se hace:

$$\frac{a + bt}{t} = z^s$$

d. $p < 0$ es entero y $q = r/s$ es racional, se hace $t = z^s$.

# PROBLEMAS RESUELTOS

**8.1.** Calcular $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}}\,dx$.

**Resolución**

El mínimo común múltiplo de los índices de las raíces es 6. Por lo tanto, se hace la sustitución $x = t^6$:

$$\int \frac{t^3+t^4}{t^3}6t^5\,dt = 6\int (t^5+t^6)\,dt = 6\Big(\frac{t^6}{6}+\frac{t^7}{7}\Big)+C = x+6\frac{\sqrt[6]{x^7}}{7}+C$$

**8.2.** Calcular $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3 x\,dx$.

**Resolución**

Mediante la sustitución $\cos x = t \Longrightarrow -\operatorname{sen} x\,dx = dt$.

$$\int \operatorname{sen}^2 x\cdot \operatorname{sen} x\,dx = -\int (1-t^2)\,dt = -\Big(t-\frac{t^3}{3}\Big)+C = -\cos x+\frac{\cos^3 x}{3}+C$$

**8.3.** Calcular $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+4x+8}\,dx$.

**Resolución**

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+8}\,dx = \int \frac{dx}{(x+2)^2+4} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{\left(\frac{x+2}{2}\right)^2+1}$$

$$= \frac{1}{4}\cdot 2\int \frac{\frac{1}{2}\,dx}{\left(\frac{x+2}{2}\right)^2+1} = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\Big(\frac{x+2}{2}\Big)+C$$

**8.4.** Calcular $\displaystyle\int x\cdot e^x\,dx$.

**Resolución**

Se resuelve por partes:

$$u = x \Longrightarrow du = dx$$
$$dv = e^x dx \Longrightarrow v = e^x$$

y

$$\int x\cdot e^x\,dx = x\cdot e^x - \int e^x\,dx = x\cdot e^x - e^x + C$$

**8.5.** Calcular $\int e^x \cdot \operatorname{sen} x dx$.

### Resolución

Integrando por partes:

$$u = e^x \implies du = e^x\,dx$$
$$dv = \operatorname{sen} x\,dx \implies v = -\cos x$$

y

$$I = \int e^x \cdot \operatorname{sen} x\,dx = -e^x \cdot \cos x + \int e^x \cdot \cos x\,dx$$

Aplicando de nuevo la integración por partes:

$$u = e^x \implies du = e^x\,dx$$
$$dv = \cos x\,dx \implies v = \operatorname{sen} x$$

y

$$I = \int e^x \cdot \operatorname{sen} x\,dx = -e^x \cdot \cos x + e^x \cdot \operatorname{sen} x - \int e^x \cdot \operatorname{sen} x\,dx$$
$$= -e^x \cdot \cos x + e^x \cdot \operatorname{sen} x - I$$

Por tanto:

$$I + I = 2I = -e^x \cdot \cos x + e^x \cdot \operatorname{sen} x \implies I = \frac{-e^x \cdot \cos x + e^x \cdot \operatorname{sen} x}{2} + C$$

**8.6.** Calcular $I = \int \operatorname{arc\,tg} x\,dx$.

### Resolución

Integrando por partes:

$$u = \operatorname{arc\,tg} x \implies du = \frac{dx}{1+x^2}$$
$$dv = dx \implies v = x$$

y

$$I = \int \operatorname{arc\,tg} x\,dx = x \cdot \operatorname{arc\,tg} x - \int \frac{x \cdot dx}{1+x^2} = x \cdot \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$$

**8.7.** Calcular $I = \int \frac{x^3+2x+1}{x^2-5x+6}\,dx$.

### Resolución

Puesto que el grado del numerador es mayor que el grado del denominador, se efectua la división:

$$\int \left(x + 5 + \frac{21x-29}{x^2-5x+6}\right) dx = \frac{x^2}{2} + 5x + \int \frac{21x-29}{(x-2)(x-3)}\,dx$$

Descomponiendo en fracciones simples:

$$\frac{21x-29}{(x-2)(x-3)} = \frac{A_1}{x-2} + \frac{A_2}{x-3} = \frac{A_1(x-3)+A_2(x-2)}{(x-2)(x-3)}$$
$$= \frac{(A_1+A_2)x - 3A_1 - 2A_2}{(x-2)(x-3)}$$

Identificando coeficientes:

$$\left.\begin{aligned} A_1 + A_2 &= 21 \\ -3A_1 - 2A_2 &= -29 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow A_1 = -13,\ A_2 = 34$$

y

$$\int \frac{21x - 29}{(x-3)(x-2)}\,dx = \int \frac{-13}{x-2}\,dx + \int \frac{34}{x-3}\,dx$$

luego:

$$I = \frac{x^2}{5} + 5x - 13 \cdot \ln|x-2| + 34 \cdot \ln|x-3| + C$$

**8.8.** Calcular $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-1)^2(x+1)}\,dx.$

**Resolución**

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x-1)^2(x+1)} &= \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_3}{x+1} \\ &= \frac{A_1(x-1)(x+1) + A_2(x+1) + A_3(x-1)^2}{(x-1)^2(x+1)} \\ &= \frac{(A_1 + A_3)x^2 + (A_2 - 2A_3)x - A_1 + A_2 + A_3}{(x-1)^2(x+1)} \end{aligned}$$

Se identifican coeficientes:

$$\left.\begin{aligned} A_1 + A_3 &= 0 \\ A_2 - 2A_3 &= 0 \\ -A_1 + A_2 + A_3 &= 1 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow A_1 = -\frac{1}{4},\ A_2 = \frac{1}{2},\ A_3 = \frac{1}{4}$$

luego:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{-\frac{1}{4}}{x-1}\,dx + \int \frac{\frac{1}{2}}{(x-1)^2}\,dx + \int \frac{\frac{1}{4}}{x+1}\,dx \\ &= -\frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x-1} + \frac{1}{4}\ln|x+1| + C \end{aligned}$$

**8.9.** Calcular $\displaystyle\int \frac{x \cdot dx}{(x^2+x+1)(x+1)}.$

**Resolución**

$$\frac{x}{(x^2+x+1)(x+1)} = \frac{Ax+B}{x^2+x+1} + \frac{C}{x+1}$$

Procediendo como en el ejercicio anterior e identificando coeficientes:

$$A = B = 1; \qquad C = -1$$

La integral se reduce a dos integrales más sencillas:

$$\int \frac{x+1}{x^2+x+1}\,dx - \int \frac{dx}{x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+x+1}\,dx - \ln|x+1|$$
$$= \frac{1}{2}\int \left(\frac{2x+1}{x^2+x+1} + \frac{1}{x^2+x+1}\right)dx - \ln|x+1|$$
$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx - \ln|x+1|$$

Por último, hay que resolver la integral:

$$\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx = \int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}\int \frac{dx}{\frac{4}{3}\cdot\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+1}$$
$$= \frac{4}{3}\int \frac{dx}{\left(\frac{2x}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\int \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}\,dx}{\left(\frac{2x}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}$$
$$= \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2x}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+C$$

**8.10.** Calcular $\displaystyle\int \frac{dx}{(9+x^2)^2}$.

**Resolución**

El denominador no tiene raíces reales. Se va a utilizar el método de Hermite:

$$Q(x) = (9+x^2)^2$$
$$Q'(x) = 2\cdot(9+x^2)\cdot 2x$$
$$Q^*(x) = m.c.d.\{Q(x), Q'(x)\} = 9+x^2$$

Por tanto:

$$\frac{1}{(9+x^2)^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{Ax+B}{9+x^2}\right) + \frac{Cx+D}{9+x^2}$$

Derivando $\dfrac{Ax+B}{9+x^2}$ e identificando coeficientes:

$$\left.\begin{array}{r} C=0 \\ -A+D=0 \\ -2B+9C=0 \\ 9A+9D=1 \end{array}\right\} \Longrightarrow A=D=\frac{1}{18},\ B=C=0$$

Resultando:

$$I = \frac{x}{18(9+x^2)} + \frac{1}{18}\int \frac{dx}{9+x^2} = \frac{x}{18(9+x^2)} + \frac{1}{54}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x}{3}\right)+C$$

**8.11.** Calcular $I = \displaystyle\int \frac{dx}{3+\cos x}$.

**Resolución**

Haciendo $x = 2 \cdot \operatorname{arc\,tg} t$ (Sección 8.8):

$$I = \int \frac{1}{3 + \dfrac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2 \cdot dt}{1+t^2} = \int \frac{dt}{t^2+2} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\left(\dfrac{t}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \int \frac{\dfrac{1}{\sqrt{2}} dt}{\left(\dfrac{t}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arc\,tg} \frac{t}{\sqrt{2}} + C$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arc\,tg} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) + C$$

**8.12.** Calcular $\int \operatorname{cosec} x \, dx$.

**Resolución**

Se hace mediante el cambio $x = 2 \cdot \operatorname{arc\,tg} t$ (Sección 8.8):

$$I = \int \frac{1+t^2}{2t} \cdot \frac{2\, dt}{1+t^2} = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| + C = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C$$

**8.13.** Calcular $\int \dfrac{\sqrt{x^2+4}}{x} dx$.

**Resolución**

Mediante el cambio $x = 2 \cdot \operatorname{tg}\ t$ (Sección 8.9), se convierte en racional:

$$I = \int \frac{\sqrt{4 \cdot \operatorname{tg}^2 t + 4}}{2 \cdot \operatorname{tg} t} \cdot \frac{2\, dt}{\cos^2 t} = 2 \int \frac{\sec t\ dt}{\operatorname{tg} t \cdot \cos^2 t} = 2 \int \frac{dt}{\operatorname{sen} t \cdot \cos^2 t}$$

Haciendo $t = 2 \cdot \operatorname{arc\,tg} z$ (Sección 8.8):

$$I = 2 \cdot \int \frac{\dfrac{2\, dz}{1+z^2}}{\dfrac{2z}{1+z^2} \cdot \left(\dfrac{1-z^2}{1+z^2}\right)^2} = 2 \int \frac{(1+z^2)^2\, dz}{z \cdot (1-z^2)^2}$$

Y mediante una descomposición en fracciones simples:

$$\frac{(1+z^2)^2}{z(1-z^2)^2} = \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{1+z} + \frac{A_3}{(1+z)^2} + \frac{A_4}{1-z} + \frac{A_5}{(1-z)^2}$$

Identificando coeficientes y resolviendo el sistema:

$$A_1 = 1,\ A_2 = 0,\ A_3 = -1,\ A_4 = 0 \text{ y } A_5 = 1$$

Resultando:

$$I = 2 \cdot \int \left( \frac{1}{z} - \frac{1}{(1+z)^2} + \frac{1}{(1-z)^2} \right) dz = 2 \cdot \ln\ |z| + \frac{2}{1+z} + \frac{2}{1-z} + C$$

siendo:

$$z = \sqrt{\frac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+4}+2}}$$

**8.14.** Calcular $I = \displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$.

**Resolución**

Mediante el cambio $x^2 + x + 1 = (t-x)^2$:

$$x = \frac{t^2-1}{2t+1} \Longrightarrow dx = \frac{2t^2+2t+2}{(2t+1)^2}\, dt$$

luego:

$$I = \int \frac{1}{\left(\dfrac{t^2-1}{2t+1}+1\right)\left(t-\dfrac{t^2-1}{2t+1}\right)} \cdot \frac{2(t^2+t+1)}{(2t+1)^2}\, dt$$
$$= \int \frac{2\, dt}{t(t+2)} = \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+2}\right) dt = \ln|t| - \ln|t+2| + C$$
$$= \ln\left|\frac{t}{t+2}\right| + C = \ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2+x+1}}{x+2+\sqrt{x^2+x+1}}\right| + C$$

**8.15.** Calcular $\displaystyle\int x^8 \sqrt[3]{1+x^3}\, dx$.

**Resolución**

Es una integral binomia (Sección 8.10). Se hace el cambio $x^3 = t \Longrightarrow 3x^2\, dx = dt$, resultando:

$$I = \frac{1}{3}\int t^2(1+t)^{\frac{1}{3}}\, dt$$

Y haciendo $1 + t = z^3 \Longrightarrow dt = 3z^2\, dz$:

$$I = \frac{1}{3}\int (z^3-1)^2 \cdot z \cdot 3z^2\, dz = \int (z^9 - 2z^6 + z^3)\, dz$$
$$= \frac{z^{10}}{10} - \frac{2z^7}{7} + \frac{z^4}{4} + C = \frac{\sqrt[3]{(1+x^3)^{10}}}{10} - \frac{2\sqrt[3]{(1+x^3)^7}}{7} + \frac{\sqrt[3]{(1+x^3)^4}}{4} + C$$

# PROBLEMAS PROPUESTOS

Calcular las integrales:

**8.16.** $\displaystyle\int \operatorname{tg} x\, dx$.

**8.17.** $\displaystyle\int \frac{x\, dx}{\sqrt{x^2+5}}$.

**8.18.** $\displaystyle\int \frac{\cos x}{1+\operatorname{sen}^2 x}\,dx.$

**8.19.** $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 x\,dx.$

**8.20.** $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 x\cos x\,dx.$

**8.21.** $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arc\,sen} x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}.$

**8.22.** $\displaystyle\int x\cos x^2\,dx.$

**8.23.** $\displaystyle\int \frac{\sqrt{2+x}}{\sqrt{2-x}}\,dx.$

**8.24.** $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+x+1}.$

**8.25.** $\displaystyle\int x\operatorname{sen} x\,dx.$

**8.26.** $\displaystyle\int \ln x\,dx.$

**8.27.** $\displaystyle\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx.$

**8.28.** $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\operatorname{sen}^2 x}.$

**8.29.** $\displaystyle\int \operatorname{sen}(\ln x)\,dx.$

**8.30.** $\displaystyle\int \frac{3x-2}{x^2-4x+5}\,dx.$

**8.31.** $\displaystyle\int e^{\operatorname{arc\,sen} x}\,dx.$

**8.32.** $\displaystyle\int \operatorname{arc\,sen} x\,dx.$

**8.33.** $\displaystyle\int x\sqrt{1+x}\,dx.$

**8.34.** $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^3+3x^2-x-3}\,dx.$

**8.35.** $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3-3x^2+2x}.$

**8.36.** $\displaystyle\int \frac{2x^3 - x^2 + 5x}{(x^2+1)^2}\, dx.$

**8.37.** $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}.$

**8.38.** $\displaystyle\int \frac{1 - \operatorname{sen} x}{1 + \operatorname{sen} x}\, dx.$

**8.39.** $\displaystyle\int \operatorname{tg}^3 x\, dx.$

**8.40.** $\displaystyle\int x^{-2}(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}\, dx.$

**8.41.** $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2+2x+4}}\, dx.$

**8.42.** $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^3-1}}{x}\, dx.$

**8.43.** $\displaystyle\int (1+\operatorname{tg} x)^3\, dx.$

**8.44.** $\displaystyle\int \frac{(1+\operatorname{sen} x)^3}{\cos x}\, dx.$

**8.45.** $\displaystyle\int \frac{4x}{\sqrt{1-4x^4}}\, dx.$

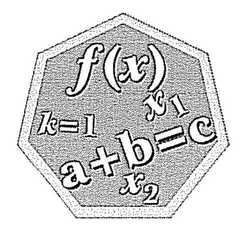
**8.46.** $\displaystyle\int \sqrt{\frac{\operatorname{arc\,sen} x}{1-x^2}}\, dx.$

**8.47.** $\displaystyle\int \ln(1-\sqrt{x})\, dx.$

**8.48.** $\displaystyle\int x^3 \cdot \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{2}\, dx.$

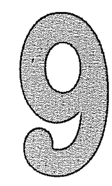
**8.49.** $\displaystyle\int \operatorname{arc\,sen} \frac{1}{x}\, dx.$

**8.50.** $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2-3)^{\frac{3}{2}}}\, dx.$




CAPÍTULO

# LA INTEGRAL DEFINIDA




El problema de hallar el área bajo una función $f(x)$ y el problema de calcular la tangente a la función en uno de sus puntos, son los que han dado origen al Cálculo Infinitesimal. En este capítulo se abordará el primero de ellos. Se considera la integral definida como un área, pero dicha integral puede evaluar otras magnitudes dependiendo de la función $f(x)$ del integrando, tales como volúmenes, longitudes, trabajo, momentos, etc.

## 9.1. EL ÁREA BAJO UNA FUNCIÓN $f(x)$

Sea $f(x)$ una función definida en $[a, b]$, tal que $f(x) > 0, \ \forall x \in [a, b]$. Se considera una *partición*:

$$P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$$

de $[a, b]$, con $x_i < x_{i+1}$ $(0 \leq i \leq n-1)$, $x_0 = a$ y $x_n = b$ (ver Figura 9.1).

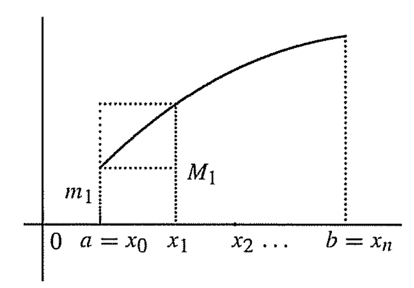



**Figura 9.1**

Se llama *norma* de la partición $P$ a la amplitud del mayor de los intervalos de dicha partición: $\delta = \text{máx}\ \{|x_i - x_{i-1}|\}$.

Sean $m_1$ y $M_1$ el ínfimo y supremo de la función $f(x)$, en $[x_0, x_1]$. En dicho intervalo $[x_0, x_1]$, las áreas $s_1$ y $S_1$ de los rectángulos de alturas $m_1$ y $M_1$ son:

$$s_1 = m_1(x_1 - x_0); \qquad S_1 = M_1(x_1 - x_0)$$

El área $A_1$, entre la función $f(x)$ y el eje OX en $[x_0, x_1]$, estará acotada entre $s_1$ y $S_1$:

$$s_1 \leq A_1 \leq S_1$$

En general, si $m_i$ y $M_i$ representan el menor y mayor valor que toma $f(x)$ en $[x_{i-1}, x_i]$:

$$s_i = m_i(x_i - x_{i-1}); \qquad S_i = M_i(x_i - x_{i-1})$$

El área $A_i$, entre la función $f(x)$ y el eje OX en $[x_{i-1}, x_i]$, estará acotada entre $s_i$ y $S_i$:

$$s_i \leq A_i \leq S_i$$

y sumando todos los intervalos de la partición $P$:

$$s = \sum_{i=1}^{n} s_i = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} A_i \leq \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} S_i = S \qquad (9.1)$$

siendo:

$$\sum_{i=1}^{n} A_i = A$$

el área comprendida entre $f(x)$ y el eje OX, entre $x = a$ y $x = b$.

Cuanto más fina sea la partición $P$ (cuanto menor sea la norma $\delta$), más se aproximarían $s$ y $S$ al valor de $A$. Cuando la norma tiende a cero, $s$ y $S$ tienden a $A$ como límite.

Tomando $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$:

$$m_i \leq f(t_i) \leq M_i$$

se tiene que:

$$A = \lim_{\delta \to 0} s = \lim_{\delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) = \lim_{\delta \to 0} S$$

Esto es, el área comprendida entre $f(x)$ y el eje OX, entre las abscisas $x = a$ y $x = b$, se puede expresar como la suma de infinitos rectángulos de altura igual al valor de $f(x)$ y cuyas bases tienden a cero.

Se va a ver ahora la relación existente entre la integral de una función $f(x)$ y el área bajo dicha función, y que el cálculo del anterior límite se puede reducir al cálculo de la primitiva de $f(x)$.



## 9.2. EL ÁREA Y LA INTEGRAL

Sea $y = f(x)$ una función continua en un intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Sea $x \in [a, b]$ y sea $s(x)$ el área bajo $f(x)$, entre $a$ y $x$. Si $x$ experimenta un pequeño incremento $\Delta x$, $s$ sufre un incremento $\Delta s$, de modo que dicho incremento queda acotado por la áreas de los rectángulos inferior ABCD y superior ABEF (ver Figura 9.2):

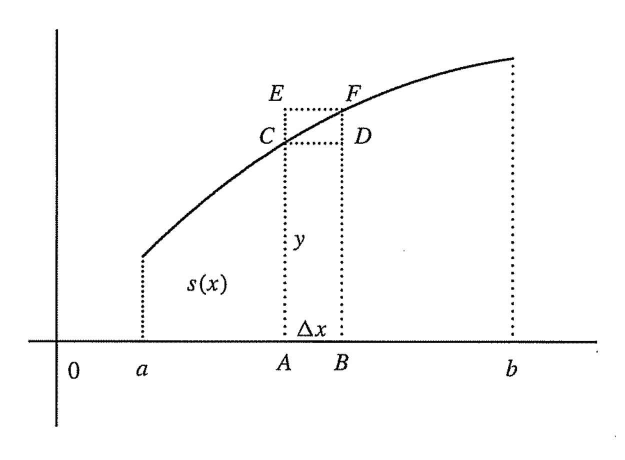



**Figura 9.2**

$$\text{Área rectángulo } ABCD < \text{Área bajo } f(x) < \text{Área rectángulo } ABEF$$

Esto es:

$$\overline{AC} \cdot \Delta x < \Delta s < \overline{BF} \cdot \Delta x$$

Dividiendo por $\Delta x$:

$$\overline{AC} < \frac{\Delta s}{\Delta x} < \overline{BF}$$

Si $\Delta x \to 0$, $\overline{BF}$ tiende a $\overline{AC}$ como límite (ver Figura 9.2):

$$\frac{ds}{dx} = \overline{AC} = y \Longrightarrow ds = y \cdot dx \Longrightarrow s = \int f(x) \cdot dx$$

que se designa por $F(x) + C$. Por tanto:

$$s = F(x) + C$$

Se ha relacionado el área bajo $f(x)$ y la integral de $f(x)$. Este resultado es conocido con el nombre de *teorema fundamental del Cálculo*.

Para determinar $C$, se observa que $s = 0$ cuando $x = a$. Sustituyendo:

$$0 = F(a) + C \Longrightarrow C = -F(a)$$

Entonces:

$$s = F(x) - F(a)$$

El área total bajo $f(x)$, entre $x = a$ y $x = b$, será:

$$s = F(b) - F(a)$$

El resultado anterior se representa con el símbolo:

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

y se conoce con el nombre de *regla de Barrow*. Se lee "integral de $f(x)$ desde $x = a$ hasta $x = b$", donde $a$ es el llamado *límite inferior* y $b$ el *límite superior*.

El signo:

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

se conoce con el nombre de *integral definida*.

Recordando la Ecuación (9.1):

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) \tag{9.2}$$

Se ha considerado la integral $\int_a^b f(x)\, dx$ como el área, pero dicha integral permite evaluar otras magnitudes dependiendo de la función $f(x)$ del integrando. Con la integral definida se pueden calcular volúmenes, longitudes, trabajo, momentos, etc.

## 9.3. PROPIEDADES DE LA INTEGRAL DEFINIDA

Si $f(x)$ es una función continua en $[a, b]$, se verifican las siguientes propiedades:

1. Si $g(x)$ es también continua en $[a, b]$:
$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx$$
2. Si $k \in \mathbb{R}$:
$$\int_a^b k \cdot f(x)\, dx = k \int_a^b f(x)\, dx$$
3. Si $c \in [a, b]$:
$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$$
4. $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx.$
5. $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\, dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx.$
6. Si $f(x) \leq g(x)$ en $[a, b]$:
$$\int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b g(x)\, dx$$

## 9.4. TEOREMA DEL VALOR MEDIO

■ TEOREMA 9.1 *Si $f(x)$ es una función continua en $[a, b]$, existe al menos un punto $\alpha \in [a, b]$ tal que:*
$$\int_a^b f(x)\, dx = (b - a)\, f(\alpha)$$

El teorema anterior afirma que el área comprendida bajo la función $f(x)$, entre $a$ y $b$, es igual al área de un rectángulo de base $b - a$ y altura $f(\alpha)$ (ver Figura 9.3).

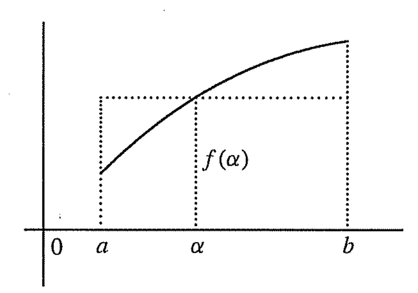



**Figura 9.3**

## 9.5. CAMBIO DE VARIABLE EN UNA INTEGRAL DEFINIDA

Al efectuar un cambio de variable en una integral definida, se suele hallar los límites de integración correspondientes a la nueva variable, evitando así el trabajo de tener que deshacer la sustitución y recuperar la variable primitiva.

**EJEMPLO 9.1** Calcular $\int_4^9 \sqrt{x}\, dx$.

$$\int_4^9 \sqrt{x}\, dx = \left[\frac{2\sqrt{x^3}}{3}\right]_4^9 = \frac{38}{3}$$

Si se hace $x = t^2 \Longrightarrow dx = 2t\, dt$, se tiene que para $x = 4,\ t = 2$, y para $x = 9,\ t = 3$. Por tanto:

$$\int_4^9 \sqrt{x}\, dx = \int_2^3 2t^2\, dt = \left[\frac{2t^3}{3}\right]_2^3 = \frac{38}{3}$$

## 9.6. VOLUMEN DE REVOLUCIÓN

Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo $[a, b]$. Se desea hallar el volumen de revolución engendrado al girar alrededor del eje OX, el recinto limitado por $f(x)$ y OX entre las abscisas $x = a$ y $x = b$.

Se realiza una partición $P = \{x_o, x_1, \ldots, x_n\}$ del intervalo $[a, b]$, con $x_0 = a$ y $x_n = b$, como se hizo en la Sección 9.1. Un rectángulo de base $x_i - x_{i-1}$ y altura $f(t_i)$, $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, engendra, al girar, un disco de radio $f(t_i)$ y altura $x_i - x_{i-1}$. La suma de los volúmenes de todos los discos que origina la partición $P$ es igual al volumen total buscado (ver Figura 9.4):

$$V = \lim_{\delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi\, [f(t_i)]^2\, (x_i - x_{i-1})$$

que, considerando la función $g(x) = \pi \cdot [f(x)]^2$ y recordando la Ecuación (9.2):

$$V = \lim_{\delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} g(t_i)(x_i - x_{i-1}) = \int_a^b g(x)\, dx = \pi \int_a^b [f(x)]^2\, dx$$

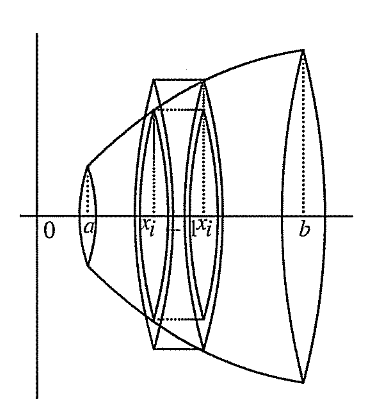



**Figura 9.4**

## 9.7. LONGITUD DE UN ARCO

Sea $f(x)$ una función continua en $[a, b]$. Sea $P$ una partición del intervalo $[a, b]$ (ver Figura 9.5). La longitud de la cuerda $\overline{P_{i-1}P_i}$ es:

$$\overline{P_{i-1}P_i} = \sqrt{[f(x_i) - f(x_{i-1})]^2 + (x_i - x_{i-1})^2} = \sqrt{1 + \frac{[f(x_i) - f(x_{i-1})]^2}{(x_i - x_{i-1})^2}}\, (x_i - x_{i-1})$$

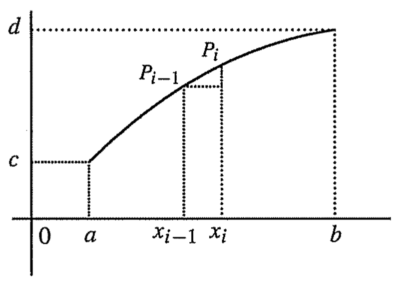



**Figura 9.5**

Según el teorema del valor medio de Lagrange (Sección 6.16), existe un punto $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ en el que la pendiente de la recta tangente, $f'(t_i)$, es igual a la pendiente de la cuerda:

$$\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$$

lo que implica:

$$\overline{P_{i-1}P_i} = \sqrt{1 + [f'(t_i)]^2}\,(x_i - x_{i-1})$$

Cuando $\delta \to 0$, la suma de las longitudes de las cuerdas $\overline{P_{i-1}P_i}$ será igual a la longitud $L$ del arco de curva $f(x)$, desde $x = a$ hasta $x = b$. Y recordando la Ecuación (9.2):

$$L = \lim_{\delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(t_i)]^2}\,(x_i - x_{i-1}) = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

O también:

$$L = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy$$

ya que la longitud del arco $L$ es la misma integrando desde $x = a$ hasta $x = b$, respecto al eje OX, que integrando desde $y = c$ hasta $y = d$, respecto al eje OY.

## 9.8. ÁREA DE LA SUPERFICIE DE REVOLUCIÓN

El área buscada será igual a la suma de las áreas laterales de los troncos de cono que origina la partición anterior $P$, cuando $\delta \to 0$.

Se ha visto en la sección anterior que:

$$\overline{P_{i-1}P_i} = \sqrt{1 + [f'(t_i)]^2}\,(x_i - x_{i-1})$$

Por otra parte, la superficie lateral de un tronco de cono es $\pi(R + r)\,l$, siendo $R$ y $r$ los radios de las bases y $l$ la longitud de la generatriz.

Por tanto, el área lateral de uno de dichos troncos será:

$$S_i = 2\pi\,\frac{f(x_i) + f(x_{i-1})}{2}\,\sqrt{1 + [f'(t_i)]^2}\,(x_i - x_{i-1})$$

Por ser $f(x)$ continua, existirá al menos un punto $t_i' \in [x_{i-1}, x_i]$, tal que:

$$f(t_i') = \frac{f(x_i) + f(x_{i-1})}{2}$$

El área total será:

$$S = \lim_{\delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} 2\pi \ f(t_i') \sqrt{1 + [f'(t_i)]^2} \ (x_i - x_{i-1}) = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \ dx$$

O también:

$$S = 2\pi \int_c^d y \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} \ dy$$

ya que:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \ dx = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} \ dy$$

## 9.9. VOLUMEN DE UN SÓLIDO DE SECCIÓN CONOCIDA

Al girar alrededor del eje OX, el área plana limitada por la función $f(x)$ y el eje $OX$, entre las abscisas $x = a$ y $x = b$, genera un volumen igual a:

$$\int_a^b \pi \ [f(x)]^2 \ dx$$

Se puede interpretar el integrando $\pi \ [f(x)]^2$ como el área del círculo determinado por la intersección del volumen de revolución con un plano perpendicular al eje OX, a una distancia $x$ del origen de coordenadas. Análogamente, si la sección determinada en un sólido por un plano perpendicular al eje OX, a una distancia $x$ del origen, es igual a $A(x)$, entonces el volumen total será:

$$V = \int_a^b A(x) \ dx$$

# PROBLEMAS RESUELTOS

**9.1.** Calcular el área limitada por la función $f(x) = e^x$ y el eje OX, entre las abscisas $x = 0$ y $x = \ln 2$.

### Resolución

El área del rectángulo vertical de ancho $\Delta x$ y altura igual a $y = e^x$ es igual a $e^x \Delta x$ (ver Figura 9.6). La suma de las áreas de los rectángulos, $\Sigma y \Delta x$, desde $x = 0$ hasta $x = \ln 2$, es la Ecuación (9.2):

$$\int_0^{\ln 2} e^x \ dx = \left[e^x\right]_0^{\ln 2} = e^{\ln 2} - e^0 = 2 - 1 = 1 \ \text{unidad de superficie}$$

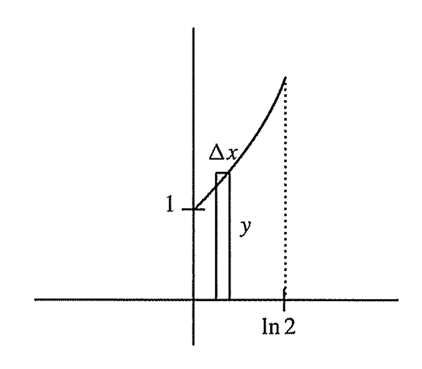



**Figura 9.6**

**9.2.** Hallar el área limitada por $y = x^2$, la recta $y = -x + 2$ y el eje de abscisas.

### Resolución

El área total será igual a la suma de las áreas bajo $y = x^2$, desde $x = 0$ hasta $x = 1$, y bajo $y = -x+2$, desde $x = 1$ hasta $x = 2$ (ver Figura 9.7):

$$\int_0^1 x^2\,dx + \int_1^2 (-x+2)\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[-\frac{x^2}{2} + 2x\right]_1^2 = \frac{5}{6} \text{ u. s.}$$

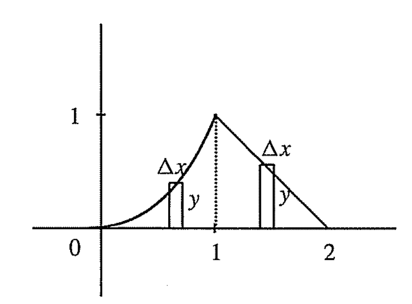



**Figura 9.7**

**9.3.** Hallar el área comprendida entre la parábola $x = 8 + 2y - y^2$ y el eje $OY$, entre las ordenadas $y = -1$ e $y = 3$.

### Resolución

Integrando respecto a $OY$:

$$\int_{-1}^3 (8 + 2y - y^2)\,dy = \left[8y + y^2 - \frac{y^3}{3}\right]_{-1}^3 = \frac{92}{3} \text{ u. s.}$$

**9.4.** Hallar el área limitada por las funciones $y = x^2$ e $y = x$.

### Resolución

La altura del rectángulo vertical, de ancho $\Delta x$, es igual a la diferencia de las ordenadas de $y = x$ e $y = x^2$. Su área será igual a $(x - x^2) \cdot \Delta x$ (ver Figura 9.8). La suma de las áreas de los rectángulos será:

$$\int_0^1 (x - x^2)\,dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{6} \text{ u. s.}$$

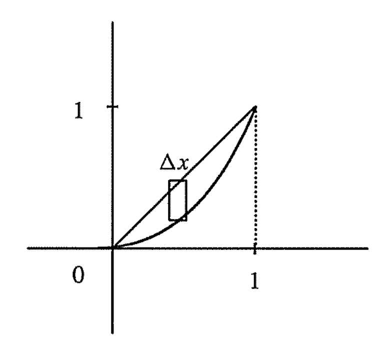



**Figura 9.8**

**9.5.** Calcular el área limitada por la función $f(x) = x^2 - 4$ y el eje $OX$, entre las abscisas $x = -2$ y $x = 4$.

**Resolución**

El valor de la integral $\int_{-2}^{4} (x^2 - 4)\, dx$ es cero, debido a que el área toma un valor negativo entre $x = -2$ y $x = 2$, por ser negativos los valores de $f(x)$ en dicho intervalo, y toma un valor positivo entre $x = 2$ y $x = 4$, por tomar $f(x)$ valores positivos (ver Figura 9.9). Para evitar esto, se debe hacer:

$$A = -\int_{-2}^{2} (x^2 - 4)\, dx + \int_{2}^{4} (x^2 - 4)\, dx = \frac{64}{3} \text{ u. s.}$$

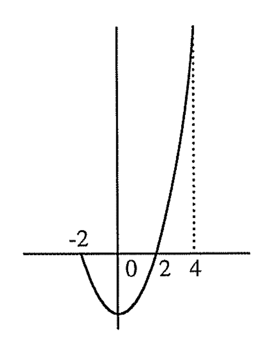



**Figura 9.9**

**9.6.** Hallar el área limitada por $y_1 = 6x - x^2$ e $y_2 = x^2 - 2x$.

**Resolución**

Las parábolas $y_1 = 6x - x^2$ e $y_2 = x^2 - 2x$ se cortan en los puntos de abscisas $x = 0$ y $x = 4$.

El área del rectángulo de altura $y_1 - y_2 = 6x - x^2 - (x^2 - 2x) = 8x - 2x^2$, y base $\Delta x$ es $(8x - 2x^2)\,\Delta x$ (ver Figura 9.10). La suma de las áreas de los infinitos rectángulos desde $x = 0$ hasta $x = 4$ es igual a:

$$\int_{0}^{4} (8x - 2x^2)\, dx = \left[4x^2 - \frac{2x^3}{3}\right]_0^4 = \frac{64}{3} \text{ u. s.}$$

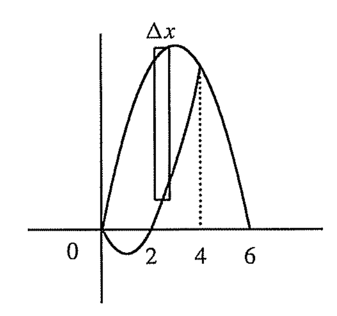



**Figura 9.10**

**9.7.** Hallar el área limitada por la parábola $y^2 = 4x$ y la recta $y = 2x - 4$: a) integrando respecto a $OY$; y b) integrando respecto a $OX$.

### Resolución

a) Los puntos de corte de ambas funciones son $(1, -2)$ y $(4, 4)$. Por otra parte, el rectángulo horizontal de altura $\Delta y$ y longitud igual a la diferencia de las abscisas de la recta y la parábola:

$$\frac{y+4}{2} - \frac{y^2}{4}$$

tiene un área igual a (ver Figura 9.11):

$$\left(\frac{y+4}{2} - \frac{y^2}{4}\right) \Delta y$$

El área buscada será:

$$\int_{-2}^{4} \left(\frac{y+4}{2} - \frac{y^2}{4}\right) dy = 9 \text{ u. s.}$$

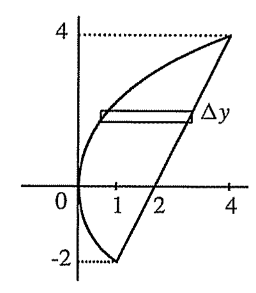



**Figura 9.11**

b) Para integrar respecto a $OX$, se divide el recinto en dos partes:

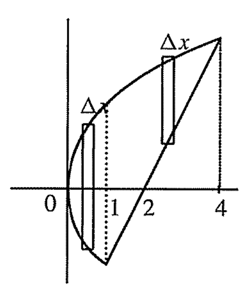



**Figura 9.12**

Entre $x = 0$ y $x = 1$ la altura del rectángulo es igual al doble de la ordenada $y = \sqrt{4x}$, mientras que entre $x = 1$ y $x = 4$ su altura es igual a la diferencia de abscisas de la parábola y la recta: $\sqrt{4x} - (2x - 4)$ (ver Figura 9.12). Por tanto:

$$\int_{0}^{1} 2\sqrt{4x}\, dx + \int_{1}^{4} \left(\sqrt{4x} - (2x-4)\right) dx = 9 \text{ u. s.}$$

**9.8.** Hallar el área de un círculo de radio $r$.

### Resolución

Se considera el círculo $x^2 + y^2 = r^2$. El área:

$$4 \int_{0}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx$$

Haciendo $x = r\,\text{sen}\,t \Longrightarrow dx = r\cos t\,dt$:

$$4\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2\cos^2 t\,dt = 4r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \pi r^2 \text{ u. s.}$$

**9.9.** Hallar el área del menor de los sectores que la recta $x = 2$ determina en el círculo $x^2 + y^2 = 25$.

### Resolución

$$2\int_2^5 \sqrt{25 - x^2}\,dx$$

Haciendo $x = 5\ \text{sen}\,t$:

$$2\int_{\text{arc sen}\,\frac{2}{5}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{25 - 25\,\text{sen}^2 t}\ 5\cos t\,dt = 50\int_{\text{arc sen}\,\frac{2}{5}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = 50\int_{\text{arc sen}\,\frac{2}{5}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt$$

$$= 25\left[t + \frac{\text{sen}\,2t}{2}\right]_{\text{arc sen}\,\frac{2}{5}}^{\frac{\pi}{2}} = 25\left[\text{arc sen}\,\frac{x}{5} + \frac{x}{25}\sqrt{25 - x^2}\right]_2^5$$

$$= -25\,\text{arc sen}\,\frac{2}{5} - \frac{25\pi}{2} - 2\sqrt{21} \text{ u.s.}$$

**9.10.** Hallar el volumen generado en la rotación del recinto limitado por la parábola $y^2 = 8x$ y la recta $x = 2$, alrededor del eje $OX$.

### Resolución

Se toma un rectángulo de ancho $\Delta x$ y altura $y = \sqrt{8x}$, que engendra un disco de volumen $\pi y^2 \Delta x = \pi 8x\Delta x$, al girar alrededor del eje $OX$ (ver Figura 9.13).

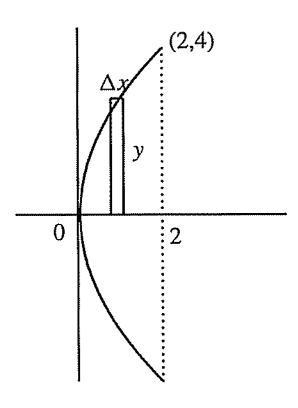



**Figura 9.13**

El volumen total será igual a la suma de los volúmenes de los discos, desde $x = 0$ hasta $x = 2$:

$$V = \pi\int_0^2 8x\,dx = 16\pi \text{ unidades de volumen}$$

Otra forma de hacerlo sería tomando rectángulos horizontales, como se aprecia en la Figura 9.14:

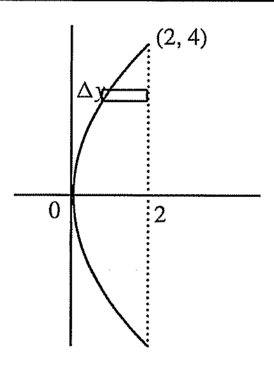



**Figura 9.14**

Al girar el rectángulo de la Figura 9.14 alrededor del eje $OX$, engendra un anillo de radio $y = \sqrt{8x}$, altura $2 - x = 2 - \frac{y^2}{8}$, y grosor $\Delta y$. Cortando longitudinalmente el anillo y transformándolo en una lámina de longitud $2\pi y$, altura igual a $2 - x = 2 - y^2/8$, y grosor $\Delta y$ se obtiene la Figura 9.15.

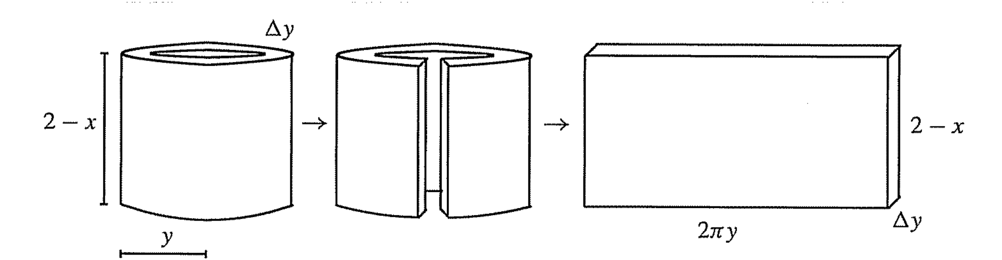



**Figura 9.15**

El volumen del anillo será igual al volumen de la lámina de la Figura 9.15:

$$2\pi y(2 - x)\Delta y = 2\pi y\left(2 - \frac{y^2}{8}\right)\Delta y$$

El volumen total será igual a la suma de los volúmenes de los anillos desde $y = 0$ hasta $y = 4$:

$$V = 2\pi \int_0^4 y\left(2 - \frac{y^2}{8}\right) dy = 16\pi \text{ u. v.}$$

**9.11.** Hallar el volumen generado en la rotación del recinto limitado por la parábola $y^2 = 8x$ y la recta $x = 2$ alrededor de dicha recta.

### Resolución

Se toma un rectángulo de ancho $\Delta y$ y longitud igual a $2 - x$ (ver Figura 9.16). Al girar éste alrededor de la recta $x = 2$, engendra un disco de volumen:

$$\pi(2 - x)^2\Delta y = \pi\left(2 - \frac{y^2}{8}\right)^2\Delta y$$

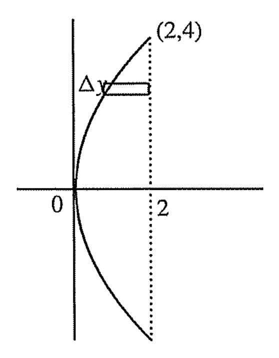



**Figura 9.16**

El volumen total $V$ será igual a la suma de los volúmenes de los infinitos discos:

$$\sum \pi \left(2 - \frac{y^2}{8}\right)^2 \Delta y$$

desde $y = -4$ hasta $y = 4$:

$$V = 2\pi \int_0^4 \left(2 - \frac{y^2}{8}\right)^2 dy = \frac{256\pi}{15} \text{ u. v.}$$

Otra forma de hacerlo sería utilizando anillos (ver Figura 9.17).

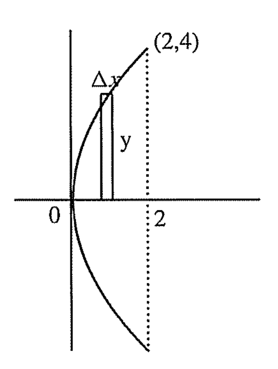



**Figura 9.17**

Se toma un rectángulo vertical de ancho $\Delta x$ y altura $y = \sqrt{8x}$. Al hacerlo girar alrededor de la recta $x = 2$, engendra un anillo de radio $2 - x$, altura $y = \sqrt{8x}$ y ancho de la pared igual a $\Delta x$:

El volumen del anillo será igual al volumen de la lámina de la Figura 9.18:

$$2\pi(2 - x)y\Delta x = 2\pi(2 - x)\sqrt{8x}\,\Delta x$$

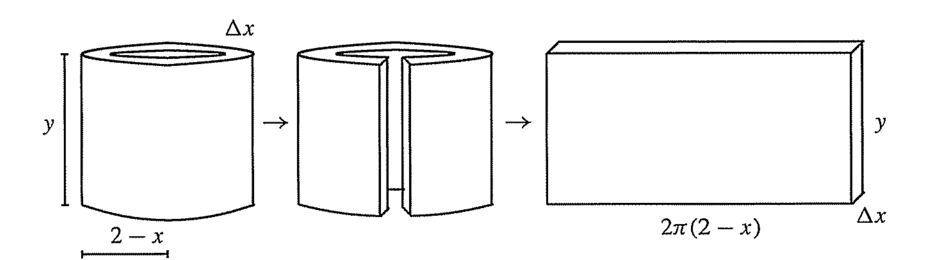



**Figura 9.18**

El volumen total $V$ será igual al doble de la suma de los volúmenes de los anillos $4\pi \sum(2-x)\sqrt{8x}\,\Delta x$:

$$V = 4\pi \int_0^2 (2-x)\sqrt{8x}\,dx = \frac{256\pi}{15} \text{ u. v.}$$

**9.12.** Hallar el volumen engendrado al girar el círculo $x^2 + y^2 = 4$ alrededor de la recta $x = 3$.

### Resolución

Se toma un rectángulo horizontal de ancho $\Delta y$. Al hacerlo girar alrededor de la recta $x = 3$, engendra un disco con radios exterior e interior iguales a $3 + x$ y $3 - x$, respectivamente (ver Figura 9.19). El volumen de este disco será:

$$\pi(3+x)^2\Delta y - \pi(3-x)^2\Delta y = \pi\left(3+\sqrt{4-y^2}\right)^2\Delta y - \pi\left(3-\sqrt{4-y^2}\right)^2\Delta y = 12\pi\sqrt{4-y^2}\Delta y$$

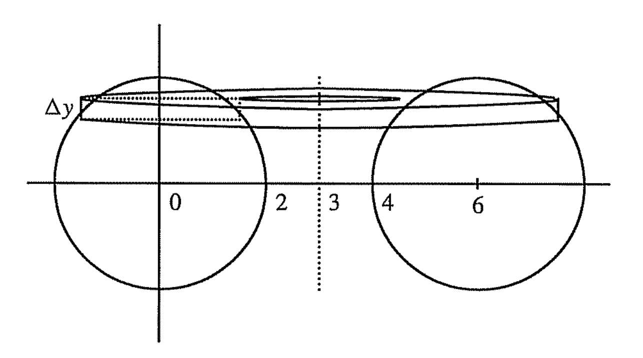



**Figura 9.19**

El volumen total:

$$V = 2\int_0^2 12\pi\sqrt{4-y^2}\,dy = 24\pi^2 \text{ u. v.}$$

La integral anterior puede resolverse mediante el cambio $y = 2\,\text{sen}\,t$.

Si se desea calcular el volumen anterior utilizando anillos, se toma un rectángulo vertical de ancho $\Delta x$ y altura $2y = 2\sqrt{4-x^2}$, que al girar alrededor de la recta $x = 3$ engendra un anillo de radio $3 - x$, altura $2y$ y grosor $\Delta x$ (ver Figura 9.20):

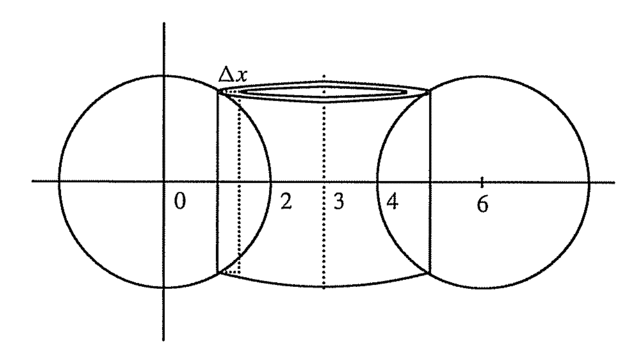



**Figura 9.20**

Procediendo del mismo modo que en problemas anteriores, el volumen del anillo será:

$$2\pi(3-x)2y\Delta x = 2\pi(3-x)2\sqrt{4-x^2}\Delta x$$

El volumen total:

$$V = 2\pi \int_{-2}^{2} (3-x)2\sqrt{4-x^2}\,dx = 4\pi \int_{-2}^{2} 3\sqrt{4-x^2}\,dx - 4\pi \int_{-2}^{2} x\sqrt{4-x^2}\,dx$$

La primera integral se resuelve con el cambio $x = 2\,\text{sen}\,t$, mientras que la segunda se puede resolver con $4 - x^2 = t$, resultando:

$$V = 24\pi^2 \text{ u. v.}$$

● NOTA *En este caso no sería lícito escribir el doble de la integral desde cero hasta 2, ya que los volúmenes desde –2 hasta 0 y desde 0 hasta 2 no son iguales.*

**9.13.** Hallar el área de la superficie de revolución generada al girar la función $x^3 = 3y$ entre las abscisas $x = 0$ y $x = 1$.

**Resolución**

$$y = \frac{x^3}{3} \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = x^2 \Longrightarrow 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + x^4$$

Por tanto, la superficie $A$:

$$A = 2\pi \int_0^1 \frac{x^3}{3}\sqrt{1+x^4}\,dx$$

Haciendo el cambio $1 + x^4 = t$, resulta $A = \frac{\pi}{9}\,(\sqrt{8} - 1)$ u. s.

**9.14.** Hallar la longitud de la curva $y = x^{\frac{3}{2}}$, entre $x = 0$ y $x = 1$.

**Resolución**

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}}$$

La longitud $L$:

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)^2}\,dx = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{9x}{4}}\,dx = \frac{13\sqrt{13} - 8}{27} \text{ u. l.}$$

Resuelta mediante el cambio $1 + \frac{9x}{4} = t^2$.

**9.15.** Hallar la longitud de la curva $y = \ln\,x$, desde $y = 0$ hasta $y = \ln\,(2\sqrt{2})$.

**Resolución**

$y = \ln x \Longrightarrow x = e^y \Longrightarrow dx/dy = e^y$. La longitud $L$:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy = \int_0^{\ln(2\sqrt{2})} \sqrt{1 + e^{2y}}\,dy$$

con el cambio $1 + e^{2y} = t^2$, resulta $L = 3 - \left(\frac{1}{2}\right)\,\ln\,2 - \sqrt{2} - \ln\,(\sqrt{2} - 1)$u. l.

**9.16.** Hallar el volumen de un sólido de base circular de 4 unidades de radio, sabiendo que toda sección determinada en él por un plano perpendicular a un diámetro fijo es un triángulo rectángulo isósceles con la hipotenusa en el plano de la base.

### Resolución

Se considera el círculo $x^2 + y^2 = 4^2$:

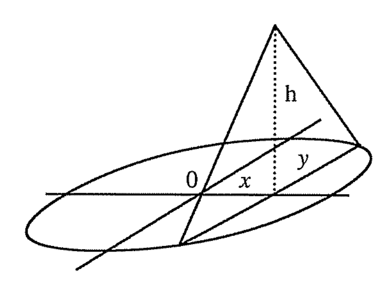



**Figura 9.21**

El área del triángulo sección, a una distancia $x$ del origen de coordenadas, será:

$$S = \frac{2y \cdot y}{2} = y^2 = 16 - x^2$$

ya que su altura $h$ es igual a $y$ (ver Figura 9.21).

El volumen:

$$V = \int_{-4}^{4} (16 - x^2)\, dx = 2\int_{0}^{4} (16 - x^2)\, dx = \frac{256}{3} \text{ u. v.}$$



**9.17.** Resolver el problema anterior si la sección es un cuadrado.

### Resolución

El área de la sección determinada por un plano perpendicular al eje de abscisas, a una distancia $x$ del origen, será:

$$S = (2y)^2 = 4y^2 = 4 \cdot (16 - x^2)$$

El volumen total $V$ del sólido:

$$V = \int_{-4}^{4} 4 \cdot (16 - x^2)\, dx = 8\int_{0}^{4} (16 - x^2)\, dx = \frac{1024}{3} \text{ u. v.}$$

**9.18.** Resolver el mismo problema si la sección es un semicírculo.

### Resolución

El área del semicírculo sección será: $S = \frac{\pi y^2}{2} = \frac{\pi}{2} \cdot (16 - x^2)$

El volumen $V$ del sólido:

$$V = \int_{-4}^{4} \frac{\pi}{2} \cdot (16 - x^2)\, dx = 2\int_{0}^{4} \frac{\pi}{2} \cdot (16 - x^2)\, dx = \frac{128\pi}{3} \text{ u. v.}$$

# PROBLEMAS PROPUESTOS

**9.19.** Hallar el área comprendida entre las parábolas $y = 6x - x^2$ e $y = x^2 - 2x$.

**9.20.** Hallar el área comprendida entre la parábola $y^2 = 4x$ y la recta $y = 2x - 4$: a) integrando respecto a $OX$; b) integrando respecto a $OY$.

**9.21.** Hallar el área de la elipse de semiejes $a$ y $b$.

**9.22.** Hallar el área de cada uno de los recintos en que la parábola:

$$x^2 = 2y$$

divide la circunferencia $x^2 + y^2 = 8$.

**9.23.** Hallar el volumen del sólido engendrado al girar alrededor del eje $OX$ el triángulo de vértices $A(2, 0)$, $B(6, 1)$ y $C(4, 2)$.

**9.24.** Hallar el volumen engendrado al girar alrededor del eje $OX$ el recinto limitado por la función:

$$f(x) = \sqrt{\frac{1}{1+x^2}}$$

y las rectas $x = \pm 3$.

**9.25.** Hallar el volumen generado en la rotación del recinto limitado por la parábola $y = 4x - x^2$ y el eje de abscisas, respecto a la recta $y = 6$.

**9.26.** Hallar el volumen generado al rotar alrededor de la recta $x = 2$ el recinto limitado por dicha recta y la parábola $y^2 = 8x$.

**9.27.** Hallar el volumen engendrado al rotar el recinto del ejercicio anterior alrededor del eje $OY$: a) mediante discos; y b) mediante anillos.

**9.28.** Hallar, mediante anillos, el volumen generado en la rotación del recinto limitado por $y = -x^2 - 3x + 6$ y la recta $y = 3 - x$, alrededor de la recta $x = 3$.

**9.29.** Calcular el volumen de una esfera de radio r: a) mediante discos; y b) mediante anillos.

**9.30.** Representar gráficamente $y = e^{-x^2}$ y hallar el volumen generado, al girar alrededor del eje $OY$, el recinto limitado por dicha función, el eje $OX$, y las rectas $x = 0$ y $x = 1$.

**9.31.** Hallar el volumen generado en la rotación de un arco de $y = \operatorname{sen} 2x$ alrededor del eje de abscisas.

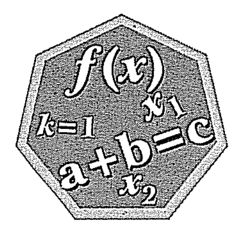
**9.32.** Hallar el volumen de un cono de radio $r$ y altura $h$: a) mediante discos; y b) mediante anillos.

**9.33.** Hallar la longitud de la circunferencia de radio $r$.

**9.34.** Hallar el perímetro de uno de los triángulos curvilíneos limitados por el eje de abscisas, y por las funciones $y = \ln(\operatorname{sen} x)$ e $y = \ln(\cos x)$.

**9.35.** Hallar el volumen de un sólido cuya base es el círculo de ecuación $x^2 + y^2 - 16x = 0$, sabiendo que toda sección determinada en él por un plano perpendicular al eje $OX$ es un rectángulo de altura igual al doble de la distancia del origen de coordenadas al plano de la sección.

CAPÍTULO




# INTEGRALES IMPROPIAS 10



Si en la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ ocurre que la función $f(x)$ no está acotada en $(a, b)$ o que $a$ o $b$, o ambos, son infinitos, dicha integral recibe el nombre de *integral impropia*. Cuando $f(x)$ no está acotada en $(a, b)$, la integral recibe el nombre de integral impropia de *segunda especie*. En el primero de los casos, cuando el que no está acotado es el intervalo $(a, b)$, recibe el nombre de integral impropia de *primera especie*.

## 10.1. CÁLCULO DE INTEGRALES IMPROPIAS

### CASO 1

Si $f(x)$ no está acotada en un único punto $c \in (a, b)$, para $h > 0$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\epsilon \to 0} \int_a^{c-\epsilon} f(x)\,dx + \lim_{\delta \to 0} \int_{c+\delta}^b f(x)\,dx$$

**Ejemplo 10.1** Calcular $\displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{(x-2)^2}$.

Si no se tiene en cuenta que el integrando presenta una discontinuidad infinita en $2 \in (0, 3)$:

$$\int_0^3 \frac{dx}{(x-2)^2} = \left[\frac{-1}{x-2}\right]_0^3 = -\frac{3}{2}. \qquad \text{Se obtiene un resultado erróneo.}$$

Considerando dicha discontinuidad:

$$\begin{aligned}
\int_0^3 \frac{dx}{(x-2)^2} &= \lim_{\epsilon \to 0} \int_0^{2-\epsilon} \frac{dx}{(x-2)^2} + \lim_{\delta \to 0} \int_{2+\delta}^3 \frac{dx}{(x-2)^2} \\
&= \lim_{\epsilon \to 0} \left[\frac{-1}{x-2}\right]_0^{2-\epsilon} + \lim_{\delta \to 0} \left[\frac{-1}{x-2}\right]_{2+\delta}^3 \\
&= \lim_{\epsilon \to 0} \left(\frac{1}{\epsilon} - \frac{1}{2}\right) + \lim_{\delta \to 0} \left(-1 + \frac{1}{\delta}\right) = \infty
\end{aligned}$$

● DEFINICIÓN 10.1 *Se dice que la integral impropia anterior:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\epsilon\to 0}\int_a^{c-\epsilon} f(x)\,dx + \lim_{\delta\to 0}\int_{c+\delta}^b f(x)\,dx$$

*es convergente si existen y son finitos los límites anteriores. Si uno o los dos límites son infinitos, se dice que es divergente.*

## CASO 2

Si la función $f(x)$ no está acotada únicamente en $x = a$ [extremo izquierdo del intervalo $(a, b)$], tomando $\epsilon > 0$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{a+\epsilon}^b f(x)\,dx$$

si existe dicho límite.

**EJEMPLO 10.2** Calcular $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

La función $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ no está acotada en $x = 0$. Por tanto:

$$\int_\epsilon^2 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\epsilon\to 0}\left[2\sqrt{x}\right]_\epsilon^2 = \lim_{\epsilon\to 0}\,(2\sqrt{2} - 2\sqrt{\epsilon}) = 2\sqrt{2}$$

## CASO 3

Si la función $f(x)$ no está acotada únicamente en $x = b$ [extremo derecho del intervalo $(a, b)$], tomando $\epsilon > 0$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\epsilon\to 0}\int_a^{b-\epsilon} f(x)\,dx$$

si existe dicho límite.

**EJEMPLO 10.3** Calcular $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x-1}$.

La función $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ no está acotada en $x = 1$. Por tanto:

$$\int_0^{1-\epsilon} \frac{dx}{x-1} = \lim_{\epsilon\to 0}\left[\ln|x-1|\right]_0^{1-\epsilon} = -\infty$$

## CASO 4

Si $f(x)$ es continua $\forall x \geq a$:

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{h\to\infty}\int_a^h f(x)\,dx$$

si existe dicho límite.

**EJEMPLO 10.4**

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{h\to\infty}\int_0^h \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{h\to\infty}\left[\operatorname{arc\,tg} x\right]_0^h = \frac{\pi}{2}$$

**CASO 5**

Si $f(x)$ es continua $\forall x \leq b$:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{h\to\infty} \int_{-h}^{b} f(x)\,dx$$

si existe dicho límite.

**EJEMPLO 10.5**

$$\int_{-\infty}^{b} e^x\,dx = \lim_{h\to\infty} \int_{-h}^{0} e^x\,dx = \lim_{h\to\infty} \Big[e^x\Big]_{-h}^{0} = \lim_{h\to\infty} (e^0 - e^{-h}) = 1$$

**CASO 6**

Si $f(x)$ es continua $\forall x \in \mathbb{R}$ y $c \in \mathbb{R}$ es un punto cualquiera:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{h\to\infty} \int_{-h}^{c} f(x)\,dx + \lim_{t\to\infty} \int_{c}^{t} f(x)\,dx$$

si existen dichos límites.

**EJEMPLO 10.6**

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{h\to\infty} \int_{-h}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \lim_{t\to\infty} \int_{0}^{t} \frac{dx}{1+x^2}$$
$$= \lim_{h\to\infty} \Big[\operatorname{arc\,tg} x\Big]_{-h}^{0} + \lim_{t\to\infty} \Big[\operatorname{arc\,tg} x\Big]_{0}^{t} = -\Big(-\frac{\pi}{2}\Big) + \frac{\pi}{2} = \pi$$

## 10.2. LA FUNCIÓN GAMMA $\Gamma(p)$

Es de la forma $\Gamma(p) = \displaystyle\int_0^{\infty} t^{p-1}e^{-t}\,dt$, $(p > 0)$.

Esta integral impropia fue introducida por Euler en 1729 y tiene la importante propiedad de que $\Gamma(p) = (p-1)!$, para $p$ entero mayor o igual que 1. Así, la función gamma puede ser interpretada como una generalización del concepto de factorial.

## 10.3. PROPIEDADES DE LA FUNCIÓN $\Gamma(p)$

1. $\Gamma(1) = \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-t}\,dt = \lim_{h\to\infty} \Big[-e^{-t}\Big]_0^h = 1$.
2. Haciendo el cambio $t = x^2 \Longrightarrow dt = 2x\,dx$ en $\Gamma(p)$:

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} e^{-x^2}\,(x^2)^{p-1}\,2x\,dx = 2\int_0^{\infty} x^{2p-1}\,e^{-x^2}\,dx$$

Tomando $p = \frac{1}{2}$:

$$\Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big) = 2\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$$

como se verá más adelante (Sección 10.6).

3. Haciendo el cambio $e^{-t} = x \Longrightarrow t = -\ln x \Longrightarrow dt = \dfrac{-dx}{x}$, la función adopta la forma:

$$\Gamma(p) = \int_1^0 (-\ln x)^{p-1} x \, \frac{-dx}{x} = \int_0^1 \left(\ln \frac{1}{x}\right)^{p-1} dx$$

4. Se va a calcular $\Gamma(p)$, para $p > 1$. Por partes:

$$\begin{aligned} u &= t^{p-1} & \Longrightarrow \quad du &= (p-1)\, t^{p-2} \\ dv &= e^{-t}\, dt & \Longrightarrow \quad v &= -e^{-t} \end{aligned}$$

luego:

$$\begin{aligned} \Gamma(p) &= \int_0^\infty t^{p-1}\, e^{-t}\, dt \\ &= \lim_{h\to\infty} \Big[ -t^{p-1}\, e^{-t} \Big]_0^h + \int_0^\infty (p-1)\, t^{p-2}\, e^{-t}\, dt \\ &= (p-1) \int_0^\infty t^{p-2} e^{-t} dt \\ &= (p-1)\, \Gamma(p-1) \end{aligned}$$

ya que:

$$\lim_{h\to\infty} \Big[ -t^{p-1}\, e^{-t} \Big]_0^h = \lim_{h\to\infty} \frac{-h^{p-1}}{e^h} = 0$$

5. Si $p$ es un número entero positivo, como $\Gamma(1) = 1$, aplicando el resultado anterior se tiene:

$$\begin{aligned} \Gamma(p) &= (p-1)(p-2)\cdots 2\Gamma(1) \\ &= (p-1)! \end{aligned}$$

De este modo, la función gamma puede ser interpretada como una generalización del concepto de factorial.
Como $\Gamma(p) = \frac{\Gamma(p+1)}{p}$, es posible ampliar $\Gamma(p)$ para los valores negativos (no enteros) de $p$.

6. La función $\Gamma(p)$ no está definida para $p = 0$ y, por tanto, para ningún valor entero negativo. En efecto:

$$\lim_{p\to 0^+} \Gamma(p) = \lim_{p\to 0^+} \frac{\Gamma(p+1)}{p} = +\infty$$

y

$$\lim_{p\to 0^-} \Gamma(p) = \lim_{p\to 0^-} \frac{\Gamma(p+1)}{p} = -\infty$$

7. Fórmula de los complementos. Si $0 < p < 1$, entonces:

$$\Gamma(p)\, \Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi p}$$

Esta fórmula es útil para calcular determinadas integrales.

## 10.4. GRÁFICA DE LA FUNCIÓN $\Gamma(p)$

A continuación, se presenta una tabla de valores para la función $\Gamma(p)$, para $p \in [1, 2]$:

| $p$ | $\Gamma(p)$ | $p$ | $\Gamma(p)$ | $p$ | $\Gamma(p)$ | $p$ | $\Gamma(p)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1,00 | 1,00000 | 1,25 | 0,90640 | 1,50 | 0,88623 | 1,75 | 0,91906 |
| 1,01 | 0,99433 | 1,26 | 0,90440 | 1,51 | 0,88659 | 1,76 | 0,92137 |
| 1,02 | 0,98884 | 1,27 | 0,90250 | 1,52 | 0,88704 | 1,77 | 0,92376 |
| 1,03 | 0,98355 | 1,28 | 0,90072 | 1,53 | 0,88757 | 1,78 | 0,95623 |
| 1,04 | 0,97844 | 1,29 | 0,89904 | 1,54 | 0,88818 | 1,79 | 0,92877 |
| 1,05 | 0,97350 | 1,30 | 0,89747 | 1,55 | 0,88887 | 1,80 | 0,93138 |
| 1,06 | 0,96874 | 1,31 | 0,89600 | 1,56 | 0,88964 | 1,81 | 0,93408 |
| 1,07 | 0,96415 | 1,32 | 0,89464 | 1,57 | 0,89049 | 1,82 | 0,93685 |
| 1,08 | 0,95973 | 1,33 | 0,89338 | 1,58 | 0,89142 | 1,83 | 0,93969 |
| 1,09 | 0,95546 | 1,34 | 0,89222 | 1,59 | 0,89243 | 1,84 | 0,94261 |
| 1,10 | 0,95135 | 1,35 | 0,89115 | 1,60 | 0,89352 | 1,85 | 0,94561 |
| 1,11 | 0,94740 | 1,36 | 0,89018 | 1,61 | 0,89468 | 1,86 | 0,94869 |
| 1,12 | 0,94359 | 1,37 | 0,88931 | 1,62 | 0,89592 | 1,87 | 0,95184 |
| 1,13 | 0,93993 | 1,38 | 0,88854 | 1,63 | 0,89724 | 1,88 | 0,95507 |
| 1,14 | 0,93642 | 1,39 | 0,88785 | 1,64 | 0,89864 | 1,89 | 0,95838 |
| 1,15 | 0,93304 | 1,40 | 0,88726 | 1,65 | 0,90012 | 1,90 | 0,96177 |
| 1,16 | 0,92980 | 1,41 | 0,88676 | 1,66 | 0,90167 | 1,91 | 0,96523 |
| 1,17 | 0,92670 | 1,42 | 0,88636 | 1,67 | 0,90330 | 1,92 | 0,96877 |
| 1,18 | 0,92373 | 1,43 | 0,88604 | 1,68 | 0,90500 | 1,93 | 0,97240 |
| 1,19 | 0,92089 | 1,44 | 0,88581 | 1,69 | 0,90678 | 1,94 | 0,97610 |
| 1,20 | 0,91817 | 1,45 | 0,88566 | 1,70 | 0,90864 | 1,95 | 0,97988 |
| 1,21 | 0,91558 | 1,46 | 0,88560 | 1,71 | 0,91057 | 1,96 | 0,98374 |
| 1,22 | 0,91311 | 1,47 | 0,88563 | 1,72 | 0,91258 | 1,97 | 0,98768 |
| 1,23 | 0,91075 | 1,48 | 0,88575 | 1,73 | 0,91467 | 1,98 | 0,99171 |
| 1,24 | 0,90852 | 1,49 | 0,88595 | 1,74 | 0,91683 | 1,99 | 0,99581 |
| | | | | | | 2,00 | 1,00000 |

● NOTA *La tabla anterior es para* $p \in [1, 2]$. *Para* $p \notin [1, 2]$ *se utilizan las fórmulas:*

$$\Gamma(p) = \frac{\Gamma(p+1)}{p} \quad y \quad \Gamma(p) = (p-1)\,\Gamma(p-1)$$

**EJEMPLO 10.7** $\Gamma(0{,}3) = \dfrac{\Gamma(1{,}3)}{0{,}3} = \dfrac{0{,}89747}{0{,}3} = 2{,}9916$, ya que $\Gamma(p) = \dfrac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p)}$.

**EJEMPLO 10.8** $\Gamma(3{,}5) = (2{,}5)\Gamma(2{,}5) = (2{,}5)(1{,}5)\Gamma(1{,}5) = 3{,}32336$, dado que $\Gamma(p) = (p-1)$ $\Gamma(p-1)$.

**EJEMPLO 10.9** Calcular $\left(\frac{7}{2}\right)!$.

$$\left(\frac{7}{2}\right)! = \Gamma\left(1+\frac{7}{2}\right) = \frac{7}{2}\,\Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{7}{2}\,\frac{5}{2}\,\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{7}{2}\,\frac{5}{2}\,\frac{3}{2}\,\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$$
$$= \frac{7}{2}\,\frac{5}{2}\,\frac{3}{2}\,\frac{1}{2}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{105}{16}\sqrt{\pi}$$

La función $\Gamma(p)$ se ha definido para $p > 0$. Pero como $\Gamma(p+1) = p\,\Gamma(p)$, se puede extender su dominio al intervalo $(-1, 0)$. De igual modo, se puede extender a $(-2, -1)$, etc (ver Figura 10.1).

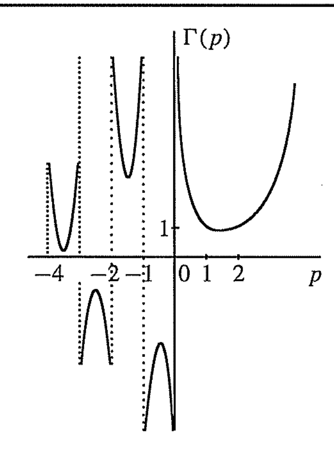



**Figura 10.1**

## 10.5. LA FUNCIÓN BETA $B(p, q)$

Es de la forma $B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}\,(1-t)^{q-1}\,dt,\ \forall p, q > 0.$

## 10.6. PROPIEDADES DE LA FUNCIÓN $B(p, q)$

1. $B(p,1) = \int_0^1 t^{p-1}\,dt = \left[\dfrac{t^p}{p}\right]_0^1 = \dfrac{1}{p}.$
2. Haciendo $1 - t = x$:

$$B(p,q) = -\int_1^0 x^{q-1}(1-x)^{p-1}\,dx = \int_0^1 x^{q-1}(1-x)^{p-1}\,dx = B(q,p)$$

3. Resolviendo $B(p,q)$ por partes:

$$u = (1-t)^{q-1} \quad\Longrightarrow\quad du = -(q-1)(1-t)^{q-2}\,dt$$
$$dv = t^{p-1}\,dt \quad\Longrightarrow\quad v = \frac{t^p}{p}$$

se tiene:

$$B(p,q) = \left[\frac{t^p(1-t)^{q-1}}{p}\right]_0^1 + \frac{q-1}{p}\int_0^1 t^p(1-t)^{q-2}\,dt = \frac{q-1}{p}\,B(p+1,q-1)$$

ya que el primer sumando es igual a cero.

4. Las funciones $B(p,q)$ y $\Gamma(p)$ están relacionadas mediante la fórmula:

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

5. Si en la función $B(p,q)$ se hace el cambio $t = \operatorname{sen}^2 x \Longrightarrow dt = 2\cdot \operatorname{sen} x \cdot \cos x\,dx$:

$$B(p,q) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2p-2} x\ \cos^{2q-2} x\ \operatorname{sen} x\ \cos x\,dx$$
$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2p-1} x\ \cos^{2q-1} x\,dx$$

Y tomando $p = q = \frac{1}{2}$, resulta:

$$B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = 2[x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi$$

Por la fórmula del apartado anterior:

$$B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1)} = \left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = \pi \Longrightarrow \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

Por tanto:

$$\int_0^{\infty} e^{-t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad \text{(Ver Sección 10.3.)}$$

# PROBLEMAS RESUELTOS

**10.1.** Calcular $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-2}}$.

**Resolución**

La función del integrando $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x-2}}$ presenta una discontinuidad infinita en $2 \in (0, 3)$. Por tanto:

$$\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-2}} = \lim_{\epsilon \to 0} \int_0^{2-\epsilon} \frac{dx}{\sqrt[3]{x-2}} + \lim_{\delta \to 0} \int_{2+\delta}^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-2}}$$

$$= \lim_{\epsilon \to 0} \left[\frac{3\sqrt[3]{(x-2)^2}}{2}\right]_0^{2-\epsilon} + \lim_{\delta \to 0} \left[\frac{3\sqrt[3]{(x-2)^2}}{2}\right]_{2+\delta}^3$$

$$= \frac{3}{2}\left[\lim_{\epsilon \to 0}(\epsilon^{\frac{2}{3}} - 2^{\frac{2}{3}}) + \lim_{\delta \to 0}(1 - \delta^{\frac{2}{3}})\right] = \frac{3(1-\sqrt[3]{4})}{2}$$

**10.2.** Calcular $I = \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + a^2}$, con $a > 0$.

**Resolución**

$$I = \lim_{h \to \infty} \int_0^h \frac{dx}{x^2 + a^2} = \lim_{h \to \infty} \left[\frac{1}{a} \text{ arc tg } \frac{x}{a}\right]_0^h = \frac{\pi}{2a}$$

**10.3.** Calcular $I = \int_0^1 \ln x\, dx$.

**Resolución**

La función del integrando, $f(x) = \ln x$, presenta una asíntota vertical en $x = 0$. Por tanto:

$$I = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{0+\epsilon}^1 \ln x\, dx = \lim_{\epsilon \to 0} \left[x \ \ln x - x\right]_{\epsilon}^1 = \lim_{\epsilon \to 0}(-1 - \epsilon \ \ln \epsilon + \epsilon) = -1$$

ya que $\lim_{\epsilon \to 0} \epsilon \ \ln \epsilon = 0$.

**10.4.** Calcular $\Gamma(3{,}4)$.

**Resolución**

$$\Gamma(3{,}4) = (2{,}4)\ \Gamma(2{,}4) = (2{,}4)(1{,}4)\ \Gamma(1{,}4) = (2{,}4)(1{,}4)(0{,}88726) = 2{,}98119$$

**10.5.** Calcular $\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)$.

**Resolución**

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}+1\right)}{-\frac{1}{2}} = -2\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{\pi}$$

De otra forma, mediante la tabla:

$$-2\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = -2\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)}{\frac{1}{2}} = -4\,\Gamma(1{,}5) = -3{,}54492$$

**10.6.** Calcular: a) $\pi!$; b) $e!$.

**Resolución**

a) $$\begin{aligned}\pi! &= \Gamma(1+\pi) = \pi\ \Gamma(\pi) = \pi(\pi-1)\ \Gamma(\pi-1)\\ &= \pi(\pi-1)(\pi-2)\ \Gamma(\pi-2) = (3{,}14159)(2{,}14159)(1{,}14159)(0{,}93642)\\ &= 7{,}1922\ldots\end{aligned}$$

b) $e! = \Gamma(1+e) = e\Gamma(e) = e(e-1)\Gamma(e-1) = (2{,}71828)(1{,}71828)(0{,}91258) = 4{,}2624\ldots$

**10.7.** Calcular:

$$\binom{7/2}{2}$$

**Resolución**

$$\binom{7/2}{2} = \frac{(7/2)!}{2!\ (7/2-2)!} = \frac{\Gamma(7/2+1)}{\Gamma(3)\ \Gamma(3/2+1)} = \frac{(7/2)(5/2)\Gamma(5/2)}{2!\ \Gamma(5/2)} = 35/8$$

**10.8.** Calcular $I = \int_0^{\infty} \sqrt{t}\, e^{-t}\, dt$.

**Resolución**

Se trata de una función gamma, con $p-1 = \frac{1}{2} \Longrightarrow p = \frac{3}{2}$. Por tanto:

$$I = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = 0{,}88623$$

De otro modo: $I = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

**10.9.** Calcular $I = \int_0^{\infty} x\, e^{-x^3}\, dx$.

### Resolución

Mediante el cambio $x^3 = y \Longrightarrow 3x^2\, dx = dy$:

$$I = \int_0^{\infty} y^{\frac{1}{3}}\, e^{-y}\, \frac{dy}{3\sqrt[3]{y^2}} = \frac{1}{3}\int_0^{\infty} y^{-\frac{1}{3}}\, e^{-y}\, dy = \frac{1}{3}\,\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3}\,\frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}+1\right)}{\frac{2}{3}} = 0{,}45083$$

**10.10.** Calcular $I = \int_0^{1} \sqrt{t}\,\sqrt{(1-t)^3}\, dt$.

### Resolución

Se trata de una función beta, con $p - 1 = \frac{1}{2}$ y $q - 1 = \frac{3}{2}$. Por tanto:

$$I = B\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma(4)} = \frac{\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\frac{3\sqrt{\pi}}{4}}{3!} = \frac{\pi}{16}$$

**10.11.** Calcular $I = \int_0^{a} x^2\sqrt{a^2 - x^2}\, dx$, mediante el cambio $x = a\sqrt{t}$.

### Resolución

$$x = a\sqrt{t} \Longrightarrow dx = \frac{a}{2\sqrt{t}}\, dt$$

luego:

$$I = \int_0^{1} a^2 t\sqrt{a^2 - a^2 t}\, \frac{a}{2\sqrt{t}}\, dt = \frac{a^4}{2}\int_0^{1} t^{\frac{1}{2}}\,(1-t)^{\frac{1}{2}}\, dt = \frac{a^4}{2}\, B\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

$$= \frac{a^4}{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(3)} = \frac{a^4}{2}\,\frac{\left[\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\right]^2}{2!} = \frac{a^4}{2}\,\frac{\frac{1}{4}\pi}{2} = \frac{a^4\pi}{16}$$

**10.12.** Calcular la integral $I = \int_1^{4} \sqrt[5]{(x-1)^2(4-x)^3}\, dx$, mediante el cambio $x = 1 + 3t$.

### Resolución

$$x = 1 + 3t \Longrightarrow dx = 3\, dt$$

luego:

$$I = 3^2 \int_0^1 \sqrt[5]{t^2(t-1)^3}\, dt = 3^2 \int_0^1 t^{\frac{2}{5}}\,(t-1)^{\frac{3}{5}}\, dt = 9\, B\Big(\frac{7}{5}, \frac{8}{5}\Big)$$

$$= 9\, \frac{\Gamma\Big(\frac{7}{5}\Big)\,\Gamma\Big(\frac{8}{5}\Big)}{\Gamma(3)} = 9\, \frac{(0{,}88726)(0{,}89352)}{2!} = 3{,}56753$$

**10.13.** Calcular la integral $I = \displaystyle\int_0^1 x^a (\ln x)^b\, dx$, $b \in \mathbb{N}$, mediante el cambio $\ln x = -\dfrac{t}{a+1}$.

**Resolución**

$$\ln x = -\frac{t}{a+1} \Longrightarrow \frac{1}{x}\, dx = -\frac{dt}{a+1}$$

luego:

$$I = \int_0^{\infty} \Big(-\frac{t}{a+1}\Big)^b e^{-\frac{at}{a+1}}\, e^{-\frac{t}{a+1}}\, \frac{dt}{a+1} = \frac{(-1)^b}{(a+1)^{b+1}} \int_0^{\infty} t^b\, e^{-t}\, dt$$

$$= \frac{(-1)^b}{(a+1)^{b+1}}\, \Gamma\Big(b+1\Big) = \frac{(-1)^b}{(a+1)^{b+1}}\, b!$$

ya que $b \in \mathbb{N}$.

**10.14.** Resolver $I = \displaystyle\int_0^4 x^{\frac{3}{2}}(4-x)^{\frac{5}{2}}\, dx$.

**Resolución**

Mediante el cambio $x = 4 - 4t \Longrightarrow dx = -4\, dt$:

$$I = -4 \int_1^0 (4t)^{\frac{5}{2}}\,(4-4t)^{\frac{3}{2}}\, dt = 4 \int_0^1 (4t)^{\frac{5}{2}}\,(4-4t)^{\frac{3}{2}}\, dt = 4^5\, B\Big(\frac{7}{2}, \frac{5}{2}\Big)$$

$$= 4^5\, \frac{\Gamma\Big(\frac{7}{2}\Big)\,\Gamma\Big(\frac{5}{2}\Big)}{\Gamma(6)} = 4^5\, \frac{5}{2}\, \frac{\Big[\Gamma\Big(\frac{5}{2}\Big)\Big]^2}{5!} = 4^5\, \frac{\frac{5}{2}\Big[\frac{3}{2}\,\Gamma\Big(\frac{3}{2}\Big)\Big]^2}{5!}$$

$$= 4^5\, \frac{5}{2}\, \frac{\frac{9}{4}\Big[\frac{1}{2}\,\Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big)\Big]^2}{5!} = 12\pi$$

**10.15.** Resolver $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^4 x dx$.

**Resolución**

Puesto que $2p - 1 = 4$ y $2q - 1 = 0$ (ver Sección 10.6):

$$I = \frac{1}{2}\, B\Big(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\Big) = \frac{1}{2}\, \frac{\Gamma\Big(\frac{5}{2}\Big)\,\Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big)}{\Gamma(3)} = \frac{1}{2}\, \frac{\frac{3}{2}\,\frac{1}{2}\Big[\Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big)\Big]^2}{2!} = \frac{3\pi}{16}$$

**10.16.** Hallar el volumen que engendra la función $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{\pi}}$ al girar alrededor del eje OX, entre $x = 1$ y $x = +\infty$.

**Resolución**

$$V = \pi \, \frac{1}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\, dx = \lim_{h \to \infty} \int_1^{h} \frac{1}{x^2}\, dx = \lim_{h \to \infty} \left[ -\frac{1}{x} \right]_1^h = 1 \text{ u. v.}$$

# PROBLEMAS PROPUESTOS

**10.17.** Calcular $\displaystyle\int_0^4 \frac{dx}{4-x}$.

**10.18.** Calcular $\displaystyle\int_{-\infty}^0 e^{2x}\, dx$.

**10.19.** Calcular $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$.

**10.20.** Calcular $\Gamma(4,3)$.

**10.21.** Calcular $\dbinom{9/2}{3}$.

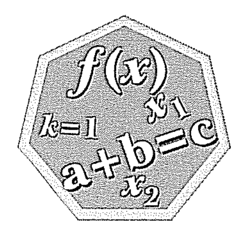
**10.22.** Calcular $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^4}\, dx$, mediante el cambio $x^4 = t$.

**10.23.** Calcular $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^4}}\, dx$, mediante el cambio $x^4 = t$.

**10.24.** Calcular $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-\sqrt[4]{x}}}\, dx$, mediante el cambio $x = t^4$.

**10.25.** Calcular $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^4 x \, \cos^2 x \, dx$.

CAPÍTULO 11




# FUNCIONES DE DOS VARIABLES



En el Capítulo 5 se han estudiado las funciones de una variable. Muchas funciones dependen de más de una variable. Por ejemplo, el área $S$ de un rectángulo es función de su base $x$ y de su altura $y$: $S = xy$. Los valores que pueden darse a $x$ e $y$ son totalmente independientes el uno del otro. La relación $z = f(x, y)$ puede visualizarse gráficamente mediante una superficie, tomando coordenadas rectangulares $x$, $y$, $z$. En este capítulo, se van a extender a funciones de dos variables los conceptos allí estudiados: límite, continuidad, derivadas, máximos y mínimos, etc.

## 11.1. FUNCIÓN DE DOS VARIABLES

● DEFINICIÓN 11.1 *Una función de dos variables $z = f(x, y)$ es una aplicación de un subconjunto $D \subseteq \mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$, es decir, una correspondencia que asigna a cada par de valores $(x, y) \in D$ un único valor $z = f(x, y) \in \mathbb{R}$.*

**EJEMPLO 11.1** La superficie de un rectángulo, $S = xy$, es función de las longitudes de sus lados $x$ e $y$.

$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h$, la superficie de un cilindro, es función de las longitudes del radio $r$ y de la altura $h$.

● DEFINICIÓN 11.2 *Se dice que la función $z = f(x, y)$ está definida en un punto $(a, b)$, si existe $f(a, b)$.*

● DEFINICIÓN 11.3 *Se llama dominio de definición o campo de existencia de una función $z = f(x, y)$ al subconjunto $A \times B \subseteq \mathbb{R}^2$, para el que dicha función está definida.*

**EJEMPLO 11.2** La función:

$$z = \frac{\sqrt{x+1}}{y-1}$$

existe si $x \in A = [-1, \infty)$ e $y \in B = \mathbb{R} - \{1\}$. Su dominio de definición es $A \times B$.

## 11.2. GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN DE DOS VARIABLES

La gráfica de una función de dos variables es una superficie en el espacio $\mathbb{R}^3$. Para hacer la representación gráfica de dicha función se recurre a una tabla de doble entrada. Por ejemplo, sea la función $z = x^2 + y^2$:

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 4 | 9 | 16 |
| 1 | 1 | 2 | 5 | 10 | 17 |
| 2 | 4 | 5 | 8 | 13 | 20 |
| 3 | 9 | 10 | 13 | 18 | 25 |
| 4 | 16 | 17 | 20 | 25 | 32 |

Esta forma de representar la superficie es poco práctica, ya que no permite visualizar su aspecto. Otra forma de proceder sería cortarla con planos paralelos a los planos de coordenadas para tener una idea aproximada de la forma de la superficie. Por ejemplo, cortando con planos paralelos al plano $XY$ se obtienen curvas de cota constante, es decir, curvas con $z$=$c$ constante, llamadas *curvas de nivel*. Al variar $c$, se genera una familia de curvas $f(x, y) = c$ que permiten visualizar dicha superficie:

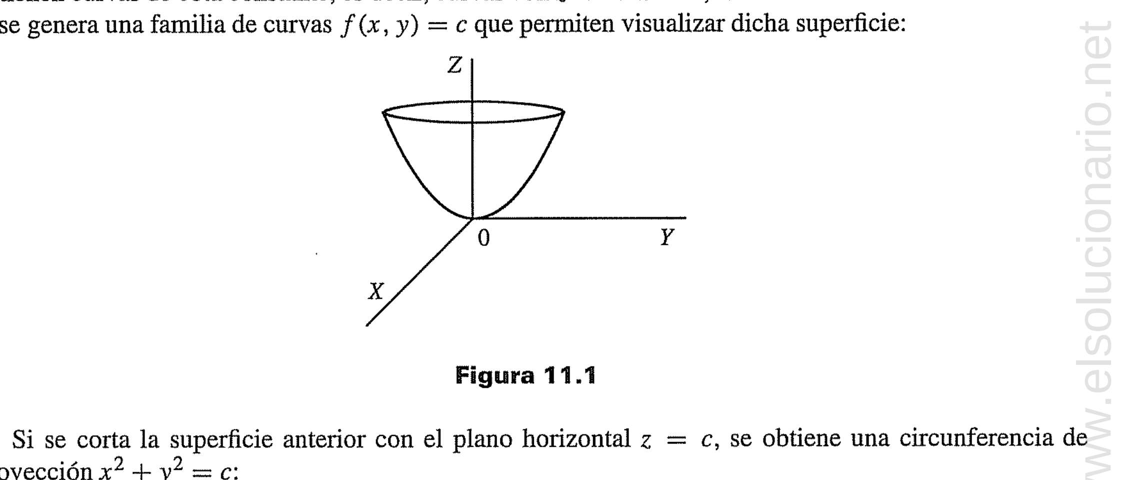



**Figura 11.1**

Si se corta la superficie anterior con el plano horizontal $z = c$, se obtiene una circunferencia de proyección $x^2 + y^2 = c$:

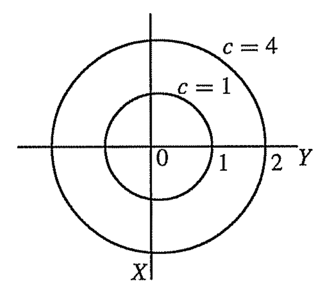



**Figura 11.2**

La intersección con el plano $x = a$, paralelo al plano $YZ$, es una parábola de ecuación $z = a^2 + y^2$, del mismo modo que la intersección de la superficie con el plano $y = b$, paralelo al plano $XZ$, es la parábola de ecuación $z = x^2 + b^2$:

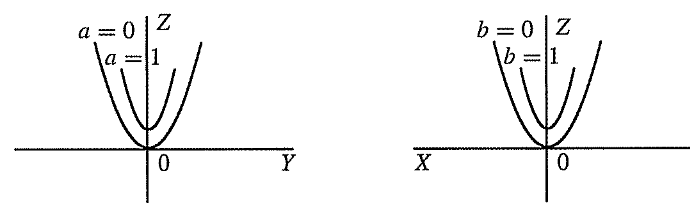



**Figura 11.3**

Lo anterior permite tener una idea de la forma de la superficie. Sin embargo, una superficie mínimamente complicada es difícil de visualizar utilizando estos métodos. Lo más conveniente es utilizar un buen programa de ordenador que permita no sólo representarla sino estudiar los detalles de dicha superficie.

## 11.3. FUNCIONES NOTABLES

a) El plano de ecuación $ax + by + cz + d = 0$, $c \neq 0$, es una función de dos variables:

$$z = -\frac{ax}{c} - \frac{by}{c} - \frac{d}{c}$$

de dominio $\mathbb{R}^2$ (ver Figura 11.4). Los puntos de intersección de dicho plano con los ejes de coordenadas son los puntos:

$$\left(-\frac{d}{a}, 0, 0\right); \quad \left(0, -\frac{d}{b}, 0\right); \quad \left(0, 0, -\frac{d}{c}\right)$$

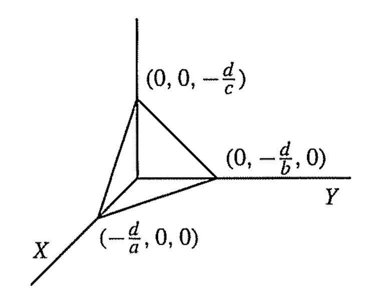



**Figura 11.4**

b) La función $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ es una esfera de centro el origen de coordenadas y radio $r$:

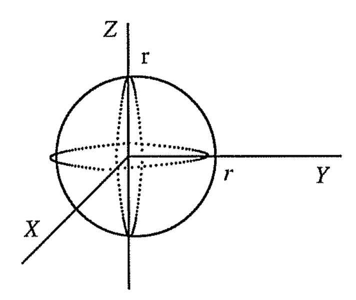



**Figura 11.5**

c) La función $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ es un elipsoide centrado en el origen de coordenadas. Sus ejes coinciden con los ejes de coordenadas, y sus semiejes son $a$, $b$ y $c$:

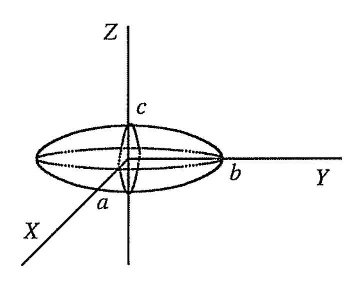



**Figura 11.6**

d) La función $x^2 + y^2 = r^2$ es un cilindro de radio $r$, cuyo eje es el eje de coordenadas $OZ$:

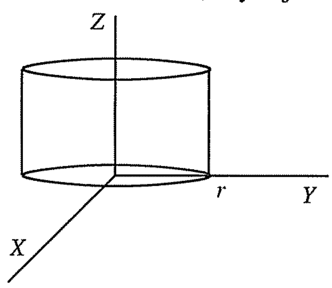



**Figura 11.7**

e) La función $x^2 + y^2 = z^2$ es un cono con vértice en el origen de coordenadas, cuyo eje es el eje de coordenadas $OZ$:

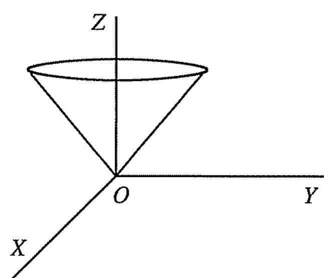



**Figura 11.8**

f) La función $z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$ es un paraboloide de vértice el origen de coordenadas, cuyo eje es el eje de coordenadas $OZ$ (ver Figura 11.9). Sus secciones horizontales son elipses.

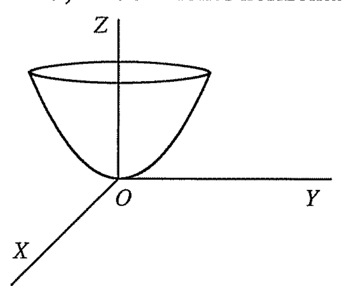



**Figura 11.9**

g) La función $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ es un hiperboloide de una hoja:

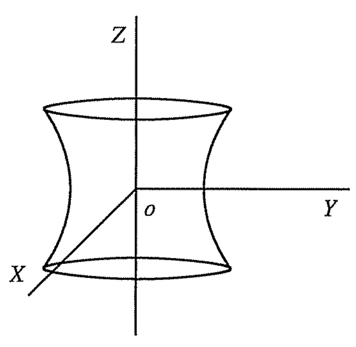



**Figura 11.10**

h) La función $\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ es un hiperboloide de dos hojas:

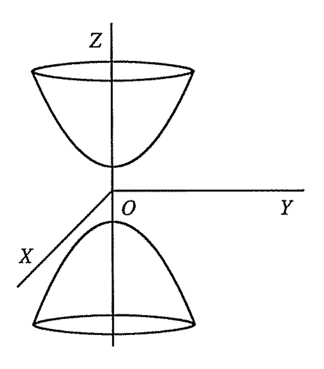



**Figura 11.11**

## 11.4. ENTORNO DE UN PUNTO

● DEFINICIÓN 11.4 *Dado un punto* $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, *se define el entorno circular de radio* $r$ *como el conjunto de los puntos* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, *tales que* $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < r$.

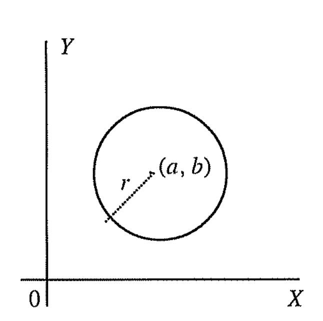



**Figura 11.12**

## 11.5. LÍMITE DE UNA FUNCIÓN

● DEFINICIÓN 11.5 *Sea* $z = f(x, y)$ *una función definida en un entorno circular* $E$ *del punto* $(a, b)$. *Se dice que* $L$ *es el límite de dicha función cuando* $(x, y)$ *tiende a* $(a, b)$, *si a toda sucesión de puntos* $(x, y)$ *contenida en el plano* $XY$, *convergente al punto* $(a, b)$, *le corresponde una sucesión de valores* $f(x, y)$ *que converge a* $L$.

*Se puede definir en términos de* $\epsilon$ *y* $\delta$: *la función* $z = f(x, y)$ *tiene por límite* $L$ *cuando* $(x, y)$ *tiende al punto* $(a, b)$ *si* $\forall \epsilon > 0, \exists \delta(\epsilon) > 0$, *tal que si* $0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta$, *se cumple que* $|f(x) - L| < \epsilon$ *y se representa:*

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = L$$

De un modo gráfico:

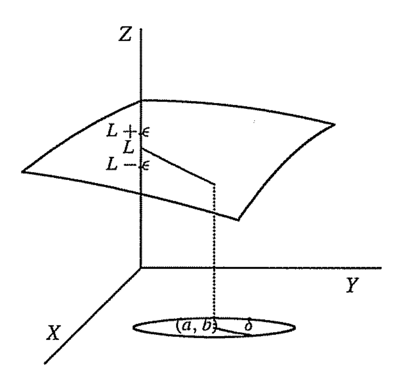



**Figura 11.13**

Una función de una variable, $y = f(x)$, posee límite $L$ en un punto $x = a$ si para toda sucesión de valores de $x$ que tiende a dicho punto, tanto por la derecha como por la izquierda, le corresponde una sucesión de valores de $f(x)$ que tiene por límite $L$. Para funciones de dos variables la situación es más compleja, ya que la sucesión $(x, y)$ puede tender al punto $(a, b)$ a lo largo de las infinitas curvas que pasan por $(a, b)$, contenidas en el plano $XY$. Para que el límite exista, ha de ser siempre el mismo con independencia de la trayectoria seguida.

**EJEMPLO 11.3** Sea la función:

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + 3y^2}$$

de dominio $\mathbb{R}^2 - (0, 0)$. Se quiere hallar su límite en $(0, 0)$. Si existe, dicho límite ha de ser el mismo para cualquier sucesión $(x, y)$ que tienda a $(0, 0)$, a lo largo de una curva $y = \phi(x)$ que pase por el origen de coordenadas. El límite en la dirección del eje $OX$, tomando $y = 0$, es:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = \lim_{x\to 0} f(x, 0) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - 0^2}{x^2 + 3 \cdot 0^2} = 1$$

El límite en la dirección del eje $OY$, tomando $x = 0$, es:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = \lim_{y\to 0} f(0, y) = \lim_{y\to 0} \frac{0^2 - y^2}{0^2 + 3y^2} = -\frac{1}{3}$$

Los límites no coinciden. Por tanto, la función carece de límite en $(0, 0)$.

**EJEMPLO 11.4** Sea la función:

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

de dominio $\mathbb{R}^2 - (0, 0)$. Se quiere hallar su límite en $(0, 0)$.

El límite en la dirección del eje $OX$, tomando $y = 0$, es:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = \lim_{x\to 0} f(x, 0) = \lim_{x\to 0} \frac{x \cdot 0}{x^2 + 0^2} = 0$$

El límite en la dirección del eje $OY$, tomando $x = 0$, es:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = \lim_{y\to 0} f(0, y) = \lim_{y\to 0} \frac{0 \cdot y}{0^2 + y^2} = 0$$

Los límites anteriores coinciden, pero considerando la dirección de la recta $y = x$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

La función no posee límite, ya que para distintas direcciones los límites son distintos.

**EJEMPLO 11.5** Sea la función:

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$$

de dominio $\mathbb{R}^2 - (0,0)$. Se quiere hallar su límite en $(0,0)$.

El límite en la dirección de toda recta que pase por $(0,0)$, $y = mx$ y es:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{mx^3}{x^4 + m^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{mx}{x^2 + m^2} = 0$$

Pero, en la dirección de la curva $y = x^2$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^4 + x^4} = \frac{1}{2}$$

La función no posee límite, ya que para distintas direcciones los límites son distintos.

La condición necesaria (pero no suficiente) para que:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$$

es que:

$$\lim_{x\to a} f(x,\phi(x)) = L$$

siendo $\phi(x)$ una curva contenida en $XY$, que pase por $(a,b)$.

Es decir, el procedimiento anterior permite resolver los casos en los que el límite no existe, pero no permite resolver los casos afirmativos.

**EJEMPLO 11.6** Sea la función:

$$f(x,y) = \frac{x^3}{x^2 + y^2}$$

Se quiere hallar su límite en $(0,0)$. Tomando una recta que pase por el origen de coordenadas, $y = mx$, se tiene:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2 + y^2} = \lim_{x\to 0} f(x,mx) = \lim_{x\to 0} \frac{x}{1 + m^2} = 0$$

Si dicho límite existe ha de ser igual a cero, pero su existencia no está probada, ya que lo anterior no es condición suficiente. Para probarla, se toma la definición de límite:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2 + y^2} = 0 \iff \forall\epsilon,\ \exists\delta > 0 \,/\, 0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta \Longrightarrow \left|\frac{x^3}{x^2 + y^2}\right| < \epsilon$$

En efecto, $\left|\frac{x^3}{x^2 + y^2}\right| \le \left|\frac{x^3}{x^2}\right| \le |x| \le \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$.

Tomando $\delta = \epsilon$, queda:

$$0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta \Longrightarrow \left|\frac{x^3}{x^2 + y^2} - 0\right| < \epsilon$$

Con lo que queda demostrado que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3}{x^2+y^2} = 0$.

Podría haberse utilizado coordenadas polares[1]: $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta$. Si $\rho \to 0$, entonces $(x,y) \to (0,0)$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2} = \lim_{\rho\to 0} \rho \cdot \frac{\cos^3\theta}{\cos^2\theta + \mathrm{sen}^2\,\theta} = \lim_{\rho\to 0} \rho\cos^3\theta = 0$$

ya que $-1 \leq \cos^3\theta \leq 1$ es una función acotada, y $\rho \to 0$.

## 11.6. PROPIEDADES DE LOS LÍMITES

1. Si existe el límite de una función $z = f(x,y)$, en un punto $(a,b)$, dicho límite es único.
2. El límite de la suma de dos funciones en un punto $(a,b)$ es igual a la suma de los límites respectivos.
3. El límite del producto de dos funciones en un punto $(a,b)$ es igual al producto de los límites respectivos.
4. El límite del cociente de dos funciones en un punto $(a,b)$ es igual al cociente de los límites respectivos, siendo el límite de la función del denominador distinto de cero.

## 11.7. CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN

● DEFINICIÓN 11.6 *Se dice que la función $z = f(x,y)$ es continua en un punto $(a,b)$ si:*

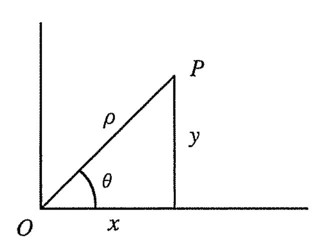
*1. La función está definida en $(a,b)$.*
*2. Existe $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$.*
*3. $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$.*

O en términos de $\epsilon$ y $\delta$: la función $z = f(x,y)$ es *continua* en el punto $(a,b)$ si, y sólo si, $\forall\epsilon > 0$, $\exists\delta(\epsilon) > 0$, tal que $0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta$ implica que $|f(x,y) - f(a,b)| < \epsilon$.

**EJEMPLO 11.7** La función del ejemplo anterior $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida como:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

[1] Un punto $P$ puede representarse utilizando coordenadas cartesianas $(x,y)$ o coordenadas polares $(\rho,\theta)$, siendo $\rho$ el módulo del vector $\vec{OP}$ y $\theta$, el ángulo de dicho vector con el eje $OX$.




La relación entre las coordenadas cartesianas y polares viene dada por:

$$\left.\begin{array}{l} x = \rho\cdot\cos\theta \\ y = \rho\cdot\mathrm{sen}\,\theta \end{array}\right\}$$

es continua en todo $\mathbb{R}^2$, ya que si $(x, y) \neq (0, 0)$:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = \lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{x^3}{x^2 + y^2} = \frac{a^3}{a^2 + b^2} = f(a, b)$$

En $(0, 0)$, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0)$, como se vio anteriormente (Ejemplo 11.6).

## 11.8. PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES CONTINUAS

1. La suma de dos funciones continuas en un punto $(a, b)$ es una función continua en dicho punto $(a, b)$.
2. El producto de dos funciones continuas en un punto $(a, b)$ es una función continua en dicho punto $(a, b)$.
3. El cociente de dos funciones continuas en un punto $(a, b)$ es una función continua en dicho punto $(a, b)$, siendo la función del denominador distinta de cero en $(a, b)$.
4. La función compuesta de dos funciones continuas en un punto $(a, b)$ es una función continua en dicho punto $(a, b)$.
5. Las funciones *polinómicas* de dos variables son aquéllas que están formadas por sumas de potencias $x^m y^n$, $m, n \in \mathbb{N}$. Dichas funciones son continuas en todo $\mathbb{R}^2$. Asimismo, las funciones *racionales* son continuas excepto en los puntos en donde se anule el denominador.

## 11.9. DERIVADAS PARCIALES

Si se corta una superficie de ecuación $z = f(x, y)$ con un plano $y = b$, paralelo al plano $XZ$, se obtiene una curva plana $z = f(x, b)$, en la que $z$ es únicamente función de la variable $x$. Al límite:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h}$$

se le llama derivada parcial *de f con respecto a x*, en el punto $(a, b)$, y se representa en la forma:

$$\frac{\partial f(a, b)}{\partial x}$$

Geométricamente, $\frac{\partial f(a,b)}{\partial x}$ es la pendiente de la recta tangente a la curva anterior $z = f(x, b)$, en el punto $(a, b, c)$ [siendo $c = f(a, b)$], contenida en el plano $y = b$ (ver Figura 11.14). Por tanto, la ecuación de dicha recta será:

$$z - c = \frac{\partial f(a, b)}{\partial x}(x - a)$$

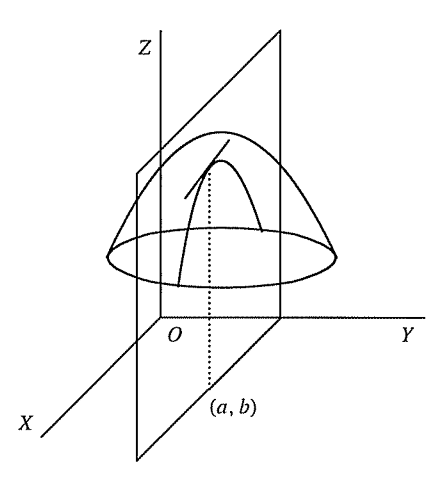



**Figura 11.14**

De forma análoga, tomando un plano $x = a$, paralelo al plano $YZ$, se obtiene una curva plana $z = f(a, y)$, en la que la variable $z$ es únicamente función de la variable $y$. Al límite:

$$\lim_{k\to 0} \frac{f(a, b+k) - f(a, b)}{k}$$

se le llama *derivada parcial de* f *con respecto a* y *en el punto (a,b)*, y se representa:

$$\frac{\partial f(a, b)}{\partial y}$$

Geométricamente, $\frac{\partial f(a,b)}{\partial y}$ es la pendiente de la recta tangente a la curva anterior $z = f(a, y)$, en el punto $(a, b, c)$, contenida en el plano $x = a$ (ver Figura 11.15). Por tanto, la ecuación de dicha recta será:

$$z - c = \frac{\partial f(a, b)}{\partial y}(y - b)$$

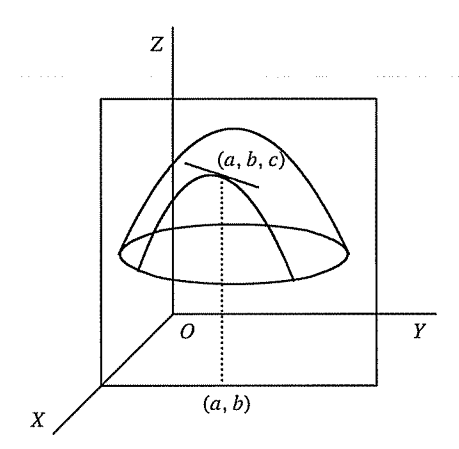



**Figura 11.15**



Por último, la ecuación del plano tangente a la superficie en el punto $(a, b, c)$ será el determinado por las dos rectas tangentes anteriores:

$$\begin{vmatrix} x-a & y-b & z-c \\ 1 & 0 & \frac{\partial f(a,b)}{\partial x} \\ 0 & 1 & \frac{\partial f(a,b)}{\partial y} \end{vmatrix} = 0$$

Es decir:

$$z - c = \frac{\partial f(a, b)}{\partial x}(x - a) + \frac{\partial f(a, b)}{\partial y}(y - b)$$

**EJEMPLO 11.8** Sea la función $z = f(x, y) = 2xy^2 - 3xy$. La derivada parcial con respecto a $x$ es:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \lim_{h\to 0} \frac{2(x+h)y^2 - 3(x+h)y - (2xy^2 - 3xy)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2xy^2 + 2hy^2 - 3xy - 3hy - 2xy^2 + 3xy}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2hy^2 - 3hy}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(2y^2 - 3y)}{h} = 2y^2 - 3y \end{aligned}$$

La derivada parcial con respecto a y es:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{k\to 0} \frac{2x(y+k)^2 - 3x(y+k) - (2xy^2 - 3xy)}{k}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{2x(y^2+k^2+2yk) - 3xy - 3xk - 2xy^2 + 3xy}{k}$$
$$= \lim_{k\to 0} \frac{2xk^2 + 4xyk - 3xk}{k} = \lim_{h\to 0} \frac{k(2xk+4xy-3x)}{k} = 4xy - 3x$$

La derivada parcial de $z$ con respecto a $x$ puede hallarse de un modo directo considerando la variable $y$ como constante. De este modo, $z$ es función de una sola variable $x$. Del mismo modo, se puede hallar la derivada parcial de $z$ con respecto a la variable $y$.

Como $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial x}$ son, a su vez, funciones de las variables $x$ e $y$, se puede reiterar el proceso, obteniéndose cuatro *derivadas parciales de segundo orden*:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}; \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}; \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}; \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

**EJEMPLO 11.9** En la función del ejemplo anterior, $z = f(x,y) = 2xy^2 - 3xy$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0; \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 4y - 3; \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4y - 3; \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4x$$

■ TEOREMA 11.1 (SCHWARZ) *Si la función $z = f(x,y)$ admite derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ en el punto $(a,b)$, siendo $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ continua en dicho punto, entonces existe $\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x \partial y}$ y se verifica que:*

$$\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x \partial y}$$

## 11.10. DIFERENCIAL TOTAL

La diferencial $dy$ de una función de una variable $y = f(x)$, se definía (Capítulo 6) como $dy = f'(x)\,dx$, donde $dy$ representaba el incremento que experimentaba la variable dependiente $y$ para un incremento $dx$ de la variable independiente $x$.

● DEFINICIÓN 11.7 *Sea la función de dos variables $z = f(x,y)$. Si la variable $y$ permanece constante, $z$ es función únicamente de la variable $x$, y la diferencial parcial de $z$ con respecto a $x$ se puede definir como $\frac{\partial z}{\partial x}\,dx$, que representa el incremento de $z$ para un incremento $dx$ de la variable $x$, cuando $y$ permanece constante.*

*Del mismo modo, si $x$ permanece constante, $z$ es función sólo de $y$, y la diferencial parcial de $z$ con respecto a $y$ es $\frac{\partial z}{\partial y}\,dy$, que representa el incremento de $z$ para un incremento $dy$ de la variable $y$, permaneciendo constante la variable $x$.*

● DEFINICIÓN 11.8 *Se llama diferencial total de $z$ a la suma de las anteriores diferenciales parciales:*

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy$$

*que representa el incremento de $z$ para sendos incrementos de las variables $x$ e $y$.*

Por otra parte, si $x$ e $y$ son, a su vez, funciones de otra variable $t$, entonces la derivada de $z$ con respecto a $t$ será:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

que es la *regla de la cadena* para una función de dos variables.

## 11.11. MÁXIMOS Y MÍNIMOS

● DEFINICIÓN 11.9 *La función $z = f(x, y)$ presenta un máximo local o relativo (mínimo local o relativo) en el punto $(a, b)$ si existe un entorno E de dicho punto, tal que $f(a, b) \geq f(x, y)$ $[f(a, b) \leq f(x, y)]$ para todo $(x, y) \in E$.*

Sea $(a, b, c)$ un punto de la superficie $z = f(x, y)$. La condición necesaria para la existencia de un máximo o un mínimo relativos es que las rectas tangentes paralelas a los planos coordenados (Sección 11.9) sean horizontales (ver Figura 11.16), es decir, que se verifiquen las dos condiciones:

$$\frac{\partial f(a,b)}{\partial x} = 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial f(a,b)}{\partial y} = 0$$

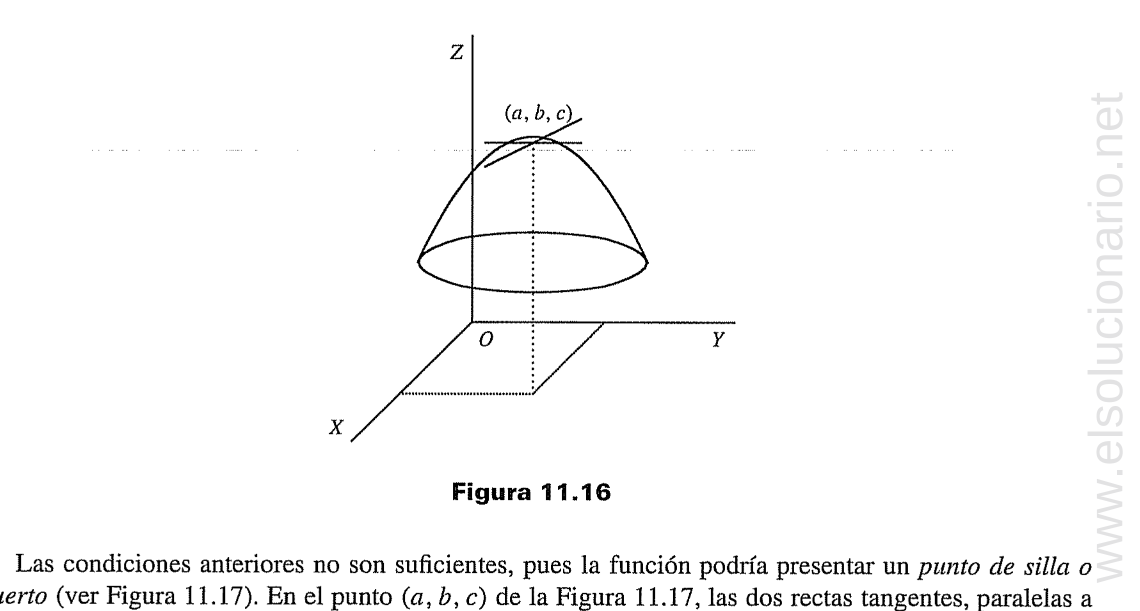



**Figura 11.16**



Las condiciones anteriores no son suficientes, pues la función podría presentar un *punto de silla o puerto* (ver Figura 11.17). En el punto $(a, b, c)$ de la Figura 11.17, las dos rectas tangentes, paralelas a los planos $XZ$ e $YZ$, son horizontales y, sin embargo, dicho punto no es un máximo ni un mínimo:

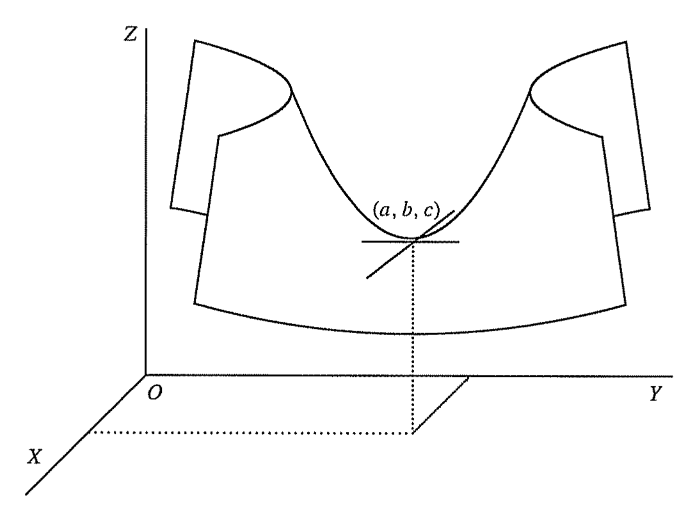



**Figura 11.17**

Por último, para saber si en el punto $(a, b)$ la función presenta un máximo o un mínimo, se estudia el

determinante llamado *hessiano*:

$$H = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f(a,b)}{\partial y \partial x} \\ \dfrac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 f(a,b)}{\partial y^2} \end{vmatrix}$$

$$\text{Si } H > 0\text{:} \begin{cases} \dfrac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x^2} > 0 \Longrightarrow \text{mínimo en } (a,b) \\ \dfrac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x^2} < 0 \Longrightarrow \text{máximo en } (a,b) \end{cases}$$

Si $H < 0 \Longrightarrow$ punto de silla en $(a, b)$.

Si $H = 0$, se trata de un caso dudoso.

## 11.12. MÉTODO DE LOS MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

Si se desea hallar los máximos y mínimos de una función $z = f(x, y)$, en la que las variables vienen ligadas por la condición $F(x, y) = 0$, se puede eliminar una de las variables utilizando dicha condición $F(x, y) = 0$ y aplicar, a continuación, el procedimiento expuesto en la sección anterior.

Otra forma de proceder es la conocida con el nombre de *método de los multiplicadores de Lagrange*: para hallar los máximos y mínimos de la función $z = f(x, y)$ con la condición $F(x, y) = 0$, se construye la llamada *función de Lagrange*, esto es, $W(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda F(x, y)$; a continuación, se resuelve el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial W}{\partial y} &= 0 \\ F(x, y) &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Los puntos en los que $f(x, y)$ tiene un máximo o un mínimo estarán entre las soluciones del sistema anterior. A la variable adicional $\lambda$ se le llama *multiplicador de Lagrange*.

# PROBLEMAS RESUELTOS

En los problemas 11.1 a 11.7, hallar el dominio de las funciones:

**11.1.** $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

### Resolución

Ha de ser $1 - x^2 - y^2 \geq 0 \Longrightarrow x^2 + y^2 \leq 1$, que es un círculo (incluida la circunferencia) de centro el origen y radio igual a 1.

**11.2.** $z = \ln(y^2 - 2x + 3)$.

### Resolución

Ha de cumplirse $y^2 - 2x + 3 > 0$. Por tanto, el dominio corresponde al exterior de la parábola $y^2 = 2x - 3$.

**11.3.** $z = y + \operatorname{arc\,sen} x$.

**Resolución**

El seno de un ángulo está acotado entre –1 y 1. El dominio será la zona $[-1, 1] \times \mathbb{R}$.

**11.4.** $z = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}}$.

**Resolución**

$1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} \geq 0 \Longrightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1$, que corresponde a una elipse de semiejes iguales a 2 y 3, con centro el origen.

**11.5.** $z = \ln(x + y)$.

**Resolución**

Semiplano $x + y > 0$.

**11.6.** $z = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y}$.

**Resolución**

$\{\mathbb{R} - \{1\}\} \times \{\mathbb{R} - \{0\}\}$. Todo $\mathbb{R}^2$, salvo las rectas $x = 1$ e $y = 0$.

**11.7.** $z = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$.

**Resolución**

$x^2 + y^2 < 1$. El círculo $x^2 + y^2 = 1$, sin la circunferencia.

**11.8.** Calcular el límite:

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 - 2xy + y^2}$$

**Resolución**

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 - 2xy + y^2} = \frac{0}{0}. \qquad \text{Indeterminado.}$$

Simplificando:

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{(x+y)(x-y)}{(x-y)^2} = \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x+y}{x-y} = \frac{2}{0} = \infty$$

**11.9.** Calcular el límite:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{y}$$

.

### Resolución

En la dirección de la recta $y = mx$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+m^2x^2}}{mx} = \lim_{x\to 0} \frac{x\sqrt{1+m^2}}{mx} = \frac{\sqrt{1+m^2}}{m}$$

El límite en $(0, 0)$ no existe, ya que depende de $m$ y $\dfrac{\sqrt{1+m^2}}{m}$ será distinto para cada valor de $m$.

**11.10.** Estudiar la continuidad de la función:

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

en el punto $(0, 0)$.

### Resolución

En coordenadas polares: $x = \rho\ \cos\theta$, $y = \rho\ \operatorname{sen}\theta$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^3}{x^2+y^2} = \lim_{\rho\to 0} \rho^2 \frac{\cos\theta\ \operatorname{sen}^3\theta}{\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta} = \lim_{\rho\to 0} \rho^2\ \cos\theta\ \operatorname{sen}^3\theta = 0$$

ya que $\cos\theta$ y $\operatorname{sen}\theta$ son funciones acotadas y $\rho \to 0$.

La función es continua en $(0, 0)$, ya que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^3}{x^2+y^2} = 0 = f(0, 0)$$

**11.11.** Estudiar la continuidad de la función:

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x\ \operatorname{sen}^2 y}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

### Resolución

La función es continua en $\mathbb{R}^2 - (0, 0)$, por ser $f(x, y)$ una combinación de funciones continuas y el denominador $x^2 + y^2 \neq 0$, para todo $(x, y) \neq (0, 0)$. El límite en $(0, 0)$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\ \operatorname{sen}^2 y}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2}$$

ya que $\operatorname{sen} y \approx y$, cuando $x \to 0$.

En coordenadas polares:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2} = \lim_{\rho\to 0} \rho \frac{\cos\theta \ \mathrm{sen}^2\theta}{\cos^2\theta + \mathrm{sen}^2\theta} = \lim_{\rho\to 0} \rho \cos\theta \ \mathrm{sen}^2\theta = 0$$

ya que $\cos\theta$ y $\mathrm{sen}\,\theta$ son funciones acotadas y $\rho \to 0$.

La función es continua en $(0, 0)$, ya que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0)$.

**11.12.** Estudiar la continuidad de la función:

$$z = \frac{\mathrm{sen}\,x - \mathrm{sen}\,y}{x - y}$$

### Resolución

Es continua en $\mathbb{R}^2 - \{(a, a),\ a \in \mathbb{R}\}$, ya que no está definida en los puntos $(a, a)$. Sin embargo:

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(a,a)} \frac{\mathrm{sen}\,x - \mathrm{sen}\,y}{x-y} &= \lim_{(x,y)\to(a,a)} \frac{2\cos\frac{x+y}{2}\ \mathrm{sen}\frac{x-y}{2}}{x-y} \\
&= \lim_{(x,y)\to(a,a)} \frac{2\cos\frac{x+y}{2}\ \frac{x-y}{2}}{x-y} \\
&= \lim_{(x,y)\to(a,a)} \cos\frac{x+y}{2} = \cos a
\end{aligned}$$

ya que $\mathrm{sen}\,\frac{x-y}{2} \approx \frac{x-y}{2}$, cuando $\frac{x-y}{2} \to 0$.

La función posee límite en $(a, a)$, pero no está definida.

**11.13.** Hallar las derivadas parciales primeras y segundas de la función $z = 4x^3 - 6xy + 2y^3$.

### Resolución

Considerando constante la variable $y$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 12x^2 - 6y$$

Considerando constante la variable $x$:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -6x + 6y^2$$

Las derivadas parciales segundas son:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 24x; \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 12y; \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -6$$

**11.14.** Hallar las ecuaciones de las rectas tangentes a la superficie $z = x^2 + y^2 + 1$, en el punto (1,2,6), paralelas a los planos YZ y XZ. Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie en dicho punto.

**Resolución**

$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x$. En el punto $(1, 2, 6)$, $\frac{\partial z}{\partial x} = 2$. La recta tangente a la superficie en $(1, 2, 6)$, paralela al plano $XZ$ es:

$$z - 6 = 2(x - 1)$$

$\frac{\partial z}{\partial y} = 2y$. En el punto $(1, 2, 6)$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 4$. La recta tangente a la superficie en $(1, 2, 6)$, paralela al plano $YZ$ es:

$$z - 6 = 4(y - 2)$$

El plano tangente en el punto $(1, 2, 6)$ contiene las dos rectas anteriores:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-6 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando el determinante: $2x + 4y - z - 4 = 0$.

**11.15.** Hallar la diferencial total de la función $z = x \cdot \operatorname{sen} y + y \cdot \operatorname{sen} x$.

**Resolución**

Las derivadas parciales son:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \operatorname{sen} y + y \cdot \cos x$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = x \cdot \cos y + \operatorname{sen} x$$

La diferencial total es:

$$dz = (\operatorname{sen} y + y \cdot \cos x)dx + (x \cdot \cos y + \operatorname{sen} x)dy$$

**11.16.** Hallar el valor aproximado de $1{,}01^{4{,}03}$.

**Resolución**

Se considera la función $z = x^y$. La diferencial total: $dz = y \cdot x^{y-1}\, dx + x^y \cdot \ln x\, dy$.
Para $x = 1$ e $y = 4$, con $dx = 0{,}01$ y $dy = 0{,}03$:

$$dz = 4 \cdot 1^{4-1} \cdot 0{,}01 + 1^4 \cdot \ln 1 \cdot 0{,}03 = 0{,}04$$

Por tanto: $1{,}01^{4{,}03} \approx 1^4 + 0{,}04 = 1{,}04$.

**11.17.** Los catetos de un triángulo rectángulo miden 3 y 4 cm. ¿Cuál será la variación de la hipotenusa cuando dichos catetos aumenten 3 y 2 mm, respectivamente?

**Resolución**

Llamando $x$ e $y$ a los catetos, la hipotenusa es $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

$$dz = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\, dx + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\, dy = \frac{3}{\sqrt{3^2 + 4^2}}\, 0{,}3 + \frac{4}{\sqrt{3^2 + 4^2}}\, 0{,}2 = 0{,}34 \text{ cm}$$

La hipotenusa aumenta 0,34 cm. Por tanto: $5 + 0{,}34 = 5{,}34$ cm.

Directamente, con la calculadora: $\sqrt{3{,}3^2 + 4{,}2^2} = 5{,}3413481\ldots$

**11.18.** El radio de un cilindro aumenta a razón de 0,1 cm/seg y su altura a razón de 0,2 cm/seg. Hallar la velocidad de crecimiento del volumen y de la superficie en el instante en que el radio y la altura son iguales a 4 y 10 cm, respectivamente.

**Resolución**

El volumen es $V = \pi r^2 h$. Por tanto (Sección 11.10):

$$\frac{dV}{dt} = 2\pi rh\,\frac{dr}{dt} + \pi r^2\,\frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dV}{dt} = 2\pi \cdot 4 \cdot 10 \cdot 0{,}1 + \pi \cdot 4^2 \cdot 0{,}2 = 11{,}2\pi \text{ cm}^3/\text{seg}$$

La superficie $S = 2\pi rh + 2\pi r^2$:

$$\frac{dS}{dt} = (2\pi h + 4\pi r)\,\frac{dr}{dt} + 2\pi r\,\frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dS}{dt} = (2\pi \cdot 10 + 4\pi \cdot 4)\,0{,}1 + 2\pi \cdot 4 \cdot 0{,}2 = 5{,}2\pi \text{ cm}^2/\text{seg}$$

**11.19.** Hallar los máximos y mínimos de la función:

$$z = \frac{x^2y^2 + x + y}{xy}$$

**Resolución**

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{x^2y - 1}{x^2} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{xy^2 - 1}{y^2} = 0 \end{aligned}\right\}$$

Resolviendo el sistema: $x = 1$, $y = 1$.

Las derivadas parciales segundas son:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2}{x^3}; \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1; \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2}{y^3}$$

El hessiano para $x = 1$, $y = 1$:

$$H = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0$$

Y, puesto que $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2 > 0$, existe un mínimo en (1, 1).

**11.20.** Hallar los máximos y mínimos de la función:

$$z = x^3 + y^3 - 9xy + 27$$

**Resolución**

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= 3x^2 - 9y = 0\\ \frac{\partial z}{\partial y} &= 3y^2 - 9x = 0\end{aligned}\right\}$$

Resolviendo el sistema: $x = 0$, $y = 0$; $x = 3$, $y = 3$.

Las derivadas parciales segundas:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x; \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -9; \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y$$

Particularizando las anteriores derivadas para $x = 0$ e $y = 0$, se obtiene el hessiano:

$$H = \begin{vmatrix} 0 & -9 \\ -9 & 0 \end{vmatrix} = -81 < 0$$

Como $H < 0$, en $(0, 0)$ hay un punto de silla.

Procediendo del mismo modo para $x = 3$ e $y = 3$:

$$H = \begin{vmatrix} 18 & -9 \\ -9 & 18 \end{vmatrix} = 243 > 0$$

Y como $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 18 > 0$, en $(3, 3)$ la función presenta un mínimo.

**11.21.** Encontrar el punto de la superficie:

$$z = \sqrt{x^2 + y^2 - xy + 1}$$

más próximo al origen de coordenadas.

**Resolución**

Un punto cualquiera de la superficie será $(a, b, \sqrt{a^2 + b^2 - ab + 1})$, de distancia $d$ al origen:

$$d = \sqrt{(a-0)^2 + (b-0)^2 + (\sqrt{a^2 + b^2 - ab + 1} - 0)^2} = \sqrt{2a^2 + 2b^2 - ab + 1}$$

En lugar de $d$, se considera la función $D = d^2$, por comodidad en los cálculos, ya que si $d^2$ es mínima en un punto, también lo será $d$. Igualando a cero las derivadas parciales de $D = d^2$:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial D}{\partial a} &= 4a - b = 0\\ \frac{\partial D}{\partial b} &= 4b - a = 0\end{aligned}\right\} \Longrightarrow a = b = 0$$

Las derivadas parciales segundas:

$$\frac{\partial^2 D}{\partial a^2} = 4; \qquad \frac{\partial^2 D}{\partial b \partial a} = \frac{\partial^2 D}{\partial a \partial b} = -1; \qquad \frac{\partial^2 D}{\partial b^2} = 4$$

El hessiano:

$$H = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 15 > 0$$

Existe mínimo en $(0, 0, 1)$.

**11.22.** Dividir un segmento de longitud $m$ en tres partes, de modo que su producto sea máximo.

### Resolución

Llamando $x$, $y$, $m - x - y$, a cada una de las partes:

$$P = xy(m - x - y) = mxy - x^2y - xy^2$$

se tiene:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x} &= my - 2xy - y^2 = 0 \\ \frac{\partial P}{\partial y} &= mx - 2xy - x^2 = 0 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow x = y = m/3$$

Las derivadas parciales segundas:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = -2y; \qquad \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} = m - 2x - 2y; \qquad \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = -2x$$

El hessiano para $x = y = m/3$:

$$H = \begin{vmatrix} -2m/3 & -m/3 \\ -m/3 & -2m/3 \end{vmatrix} = m^2/3 > 0$$

Como $\dfrac{\partial^2 P}{\partial x^2} = -2m/3 < 0$, existe máximo para $x = y = m/3$.

**11.23.** Hallar la distancia mínima entre las rectas:

$$x = \frac{y}{3} = \frac{z}{2}; \qquad x = y = z - 2$$

### Resolución

Las rectas en paramétricas son:

$$\left.\begin{aligned} x &= a \\ y &= 3a \\ z &= 2a \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} x &= b \\ y &= b \\ z &= 2 + b \end{aligned}\right\}$$

El problema se reduce a hallar el mínimo de la función $d$:

$$d = \sqrt{(a-b)^2 + (3a-b)^2 + (2a-2-b)^2}$$

En lugar de la función $d$ se toma la función $d^2$, para simplificar los cálculos. Se igualan a cero las derivadas parciales de $d^2$:

$$\left.\begin{aligned} 2(a-b) + 6(3a-b) + 4(2a-2-b) &= 0 \\ -2(a-b) - 2(3a-b) - 2(2a-2-b) &= 0 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow a = 0, \; b = -2/3$$

Por las condiciones del problema, la función debe presentar un mínimo para $a = 0$, $b = -2/3$.

Los puntos de distancia mínima son $(0, 0, 0)$ y $(-2/3, -2/3, 4/3)$, y dicha distancia mínima es:

$$\sqrt{4/9 + 4/9 + 16/9} = \sqrt{24}/3$$

**11.24.** Se quiere convertir una plancha de zinc de 60 cm de ancho en un canalón, como muestra la Figura 11.18. Hallar el valor de $x$ y de $\alpha$ para que el caudal sea máximo.

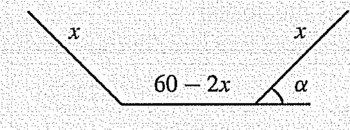



**Figura 11.18**

### Resolución

Para que el caudal sea máximo, el área de la sección ha de ser máxima. El área de un trapecio es igual a la semisuma de sus bases multiplicada por su altura:

$$S = \frac{60 - 2x + 60 - 2x + 2x \cdot \cos\alpha}{2} \cdot x \cdot \operatorname{sen}\alpha = (60 - 2x + x \cdot \cos\alpha) \cdot x \cdot \operatorname{sen}\alpha$$

Igualando a cero las derivadas parciales de $S$:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial x} &= 60 \cdot \operatorname{sen}\alpha - 4x \cdot \operatorname{sen}\alpha + 2x \cdot \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\alpha = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial \alpha} &= 60\, x \cdot \cos\alpha - 2x^2 \cdot \cos\alpha + x^2(\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2\alpha) = 0 \end{aligned}\right\}$$

Resolviendo el sistema, se obtiene: $x = 20$ cm, $\alpha = 60^{\circ}$.

**11.25.** El volumen de un paralelepípedo es igual a 8 cm$^3$. Hallar las dimensiones del de superficie total mínima, empleando el método de los multiplicadores de Lagrange.

### Resolución

La superficie total $S$ del paralelepípedo de dimensiones $a$, $b$ y $c$ es:

$$S = 2(ab + ac + bc)$$

Se halla el mínimo de la función (Sección 11.12):

$$W = 2(ab + ac + bc) + \lambda(abc - 8)$$

puesto que el volumen $V = abc = 8$. Igualando a cero las derivadas parciales de $W$:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial a} &= 2(b + c) + \lambda bc = 0 \\ \frac{\partial W}{\partial b} &= 2(a + c) + \lambda ac = 0 \\ \frac{\partial W}{\partial c} &= 2(a + b) + \lambda ab = 0 \end{aligned}\right\}$$

De estas ecuaciones y de la condición $abc - 8 = 0$, se obtiene la solución $a = b = c = 2$. Se trata de un cubo.

# PROBLEMAS PROPUESTOS

Hallar el dominio de las funciones:

**11.26.** $z = 1 + \sqrt{-(x-y)^2}$.

**11.27.** $z = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2}$.

**11.28.** $z = \sqrt{x - \sqrt{y}}$.

**11.29.** $z = \ln(x^2 + y)$.

**11.30.** $z = \sqrt{x \cdot \operatorname{sen} y}$.

**11.31.** $z = x + \sqrt{y}$.

**11.32.** $z = \dfrac{1}{x^2+y^2}$.

**11.33.** Representar gráficamente la función $z = x^2 + y^2$, hallando sus intersecciones con planos paralelos a los planos coordenados.

**11.34.** Realizar lo mismo para la función $z = xy$.

**11.35.** Realizar lo mismo para $z = \sqrt{16 - 4x^2 - y^2}$.

**11.36.** Identificar y dibujar las superficies: a) $y^2 + z^2 = 9$; y b) $x^2 + 2y^2 + z^2 - 4x + 4y - 2z + 3 = 0$.

**11.37.** Estudiar la continuidad de la función:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

en el punto $(0,0)$.

**11.38.** Hallar las derivadas parciales primeras y segundas de la función $z = e^{x + \operatorname{sen} y}$.

**11.39.** Hallar lo mismo para la función $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

**11.40.** Hallar el plano tangente a la superficie $z^2 - 2x^2 - 2y^2 - 12 = 0$, en el punto $(1, -1, 4)$.

**11.41.** Hallar la diferencial total de la función $z = x^2 + y^3 - 2xy$.

**11.42.** Hallar lo mismo para la función $z = xy$.

**11.43.** El área lateral de un cono sufre un cierto incremento debido a pequeños incrementos de $\dfrac{1}{8}$ cm en los valores de $r$ y $h$, que eran de 4 y 5 cm, respectivamente. Hallar el incremento de dicha área.

**11.44.** Estimar el valor de $\sqrt{(3{,}01)^2 + (3{,}99)^2}$.

**11.45.** Comprobar que la función:

$$z = \frac{2x+y}{2x-y}$$

verifica que $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0.$

**11.46.** Comprobar que la función:

$$z = \ln\sqrt{x^2y + \operatorname{arc\,tg}(x^2y)}$$

verifica que $x\dfrac{\partial z}{\partial x} - 2y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0.$

**11.47.** Dada la función:

$$z^2 + \frac{2}{x} - \sqrt{y^2 - z^2} = 0$$

demostrar que $x^2\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{1}{y}\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{1}{z}.$

**11.48.** Dada la función $z^3 - xz - y = 0$, demostrar que:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{3z^2 + x}{(3z^2 - x)^3}$$

**11.49.** Hallar los máximos y mínimos de $z = x^3 + x^2y + y^2 + 2y + p$. Hallar $p$ para que $z$ tenga un mínimo igual a cero.

**11.50.** Hallar el paralelepípedo de mayor volumen entre todos los de superficie total igual a 24 cm$^2$, utilizando el método de los multiplicadores de Lagrange.

**11.51.** Descomponer el número 9 en tres sumandos, de modo que la suma de sus cubos sea mínima.

**11.52.** Dados tres puntos del plano no alineados, hallar otro punto tal que la suma de los cuadrados de sus distancias a ellos sea mínima.

**11.53.** Inscribir en un círculo de 1 cm de radio un triángulo de área máxima.

**11.54.** Hallar la distancia mínima del punto (2, 1, 1) al plano de ecuación $x + y + z = 1$.

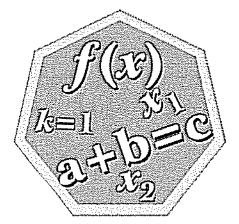
**11.55.** Sobre los lados de un rectángulo de 8 cm de perímetro se trazan cuatro semicircunferencias exteriores a él. Hallar la superficie total mínima de la figura obtenida, utilizando el método de los multiplicadores de Lagrange.

**11.56.** Una caja rectangular descansa sobre el plano XY con un vértice en el origen, con sus aristas adyacentes coincidiendo con los ejes de coordenadas. Hallar el volumen máximo de la caja si el vértice opuesto al origen está sobre el plano $6x + 4y + 3z - 24 = 0$.

**11.57.** Hallar los máximos y mínimos de la función:

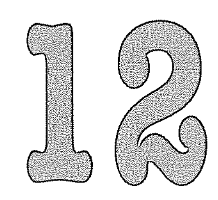
$$z = x\ \ln x + y\ \ln y$$

estando ligadas las variables $x$ e $y$ por la relación $x + y = 2$.




CAPÍTULO

# INTEGRACIÓN MÚLTIPLE






En el Capítulo 9 se estudió la integral definida, $\int_a^b f(x)\,dx$, que permitía hallar el área bajo la función $f(x)$ entre las abscisas $a$ y $b$. Se va a calcular ahora dicha área de un modo más general, mediante una integral doble. Asimismo, dicha integral doble, $\int\int_S f(x,y)\,dxdy$, tiene una interpretación semejante a aquélla como el volumen bajo la superficie $f(x,y)$ en el dominio $S$. El desarrollo expuesto para las integrales dobles se aplica a las llamadas integrales triples, que no presentan ninguna característica específica distinta a la de aquéllas.

## 12.1. LA INTEGRAL DOBLE

Si se quiere hallar el área de un recinto $S$ de $\mathbb{R}^2$ (ver Figura 12.1), limitado por las abscisas $x = a$ y $x = b$ $(a < b)$, y las funciones $y = p(x)$, $y = q(x)$ continuas $[p(x) \leq q(x)]$, tomando una partición $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ de $[a, b]$, con $x_i < x_{i+1}$ $(0 \leq i \leq n-1)$, $x_0 = a$, $x_n = b$, siendo $\delta$ la norma de la partición $P$ y $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, el área $A$ del recinto $S$ viene dada por (Sección 9.1):

$$A = \lim_{\delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} [p(t_i) - q(t_i)](x_i - x_{i-1}) = \int_a^b [p(x) - q(x)]\,dx$$

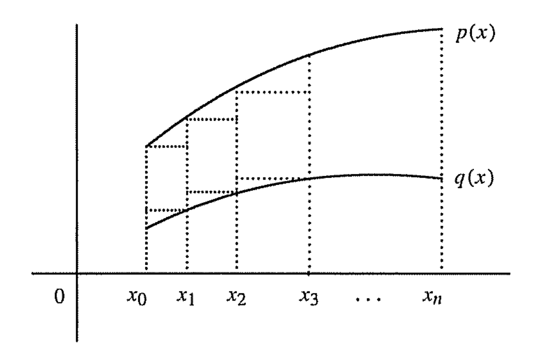



**Figura 12.1**

Pero se puede expresar $A$ de otra forma; tomando una franja cualquiera $[x_{i-1}, x_i]$, puede subdividirse en franjas horizontales $[y_{j-1}, y_j]$, dando lugar a rectángulos cuya suma es el área de la franja considerada en la Figura:

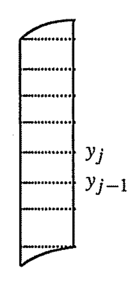



**Figura 12.2**

Entonces, el área total $A$ será la suma de las áreas de todos los rectángulos:

$$A = \lim_{\gamma \to 0} \sum_{i=1}^{n} \left[ \sum_{j=1}^{m} (y_j - y_{j-1}) \right] (x_i - x_{i-1})$$

siendo $\gamma$ la longitud de la diagonal más larga de dichos rectángulos.

El área $A$ se puede expresar como:

$$A = \int_a^b \left[ \int_{p(x)}^{q(x)} dy \right] dx$$

Si se tiene una función de dos variables $z = f(x, y)$, definida en un recinto $S$, a la expresión:

$$\int\int_S f(x, y)\, dxdy$$

se le llama integral doble sobre el recinto $S$, y representa el volumen del cilindro de generatrices paralelas al eje OZ, limitado por la superficie $z = f(x, y)$ y el plano XY en la Figura:

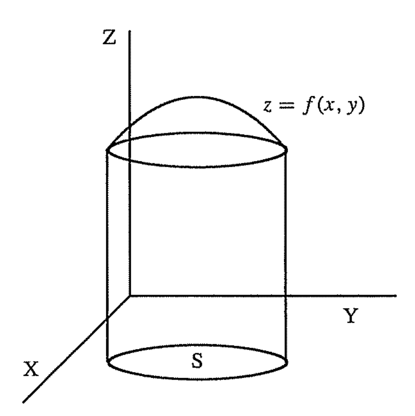



**Figura 12.3**

La interpretación de la integral doble, $\int\int_S f(x, y)\, dxdy$, como un volumen se basa en el hecho de que si $f(x, y) \geq 0$ en $S$ y se hace una partición de $S$ en subrectángulos, entonces el producto $f(x, y)\, dxdy$ es el volumen del prisma de base $dxdy$ y altura $f(x, y)$.

## 12.2. CÁLCULO DE LA INTEGRAL DOBLE

La forma de calcular la integral doble depende de como esté definido el recinto $S$:

a) Si el recinto $S$ está limitado por las rectas $x = a, x = b$ $(a < b)$ y las funciones $y = p(x)$, $y = q(x)$ continuas $[p(x) \leq q(x)]$ (ver Figura 12.4), entonces:

$$\int\int_S f(x, y)\, dydx = \int_a^b \left[\int_{p(x)}^{q(x)} f(x, y)\, dy\right]dx$$

Se resuelve, en primer lugar, la integral del corchete y, a continuación, la integral exterior.

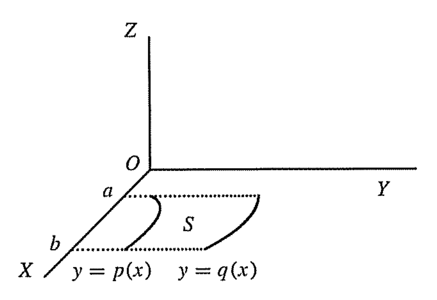



**Figura 12.4**

b) Si el recinto $S$ está limitado por las rectas $y = a, y = b$ $(a < b)$ y las funciones $x = p(y)$, $x = q(y)$ continuas $[p(y) \leq q(y)]$ (ver Figura 12.5), entonces:

$$\int\int_S f(x, y)\, dxdy = \int_a^b \left[\int_{p(y)}^{q(y)} f(x, y)\, dx\right]dy$$

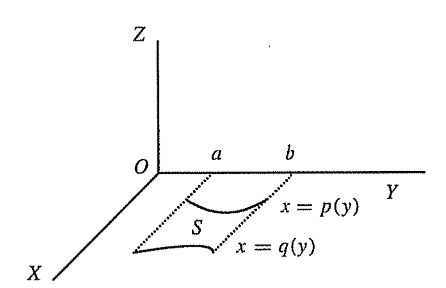



**Figura 12.5**

c) Si el recinto $S$ es de otra forma, se descompone en regiones a las que se pueda aplicar los casos anteriores.

● NOTA

1. *Si $f(x, y) = 1$, la anterior integral doble representa el área del recinto S.*
2. *Si $f(x, y)$ es continua en el recinto $[a, b] \times [c, d]$, entonces:*

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dydx = \int_c^d \int_a^b f(x, y)\, dxdy$$

3. *Algunas veces, la integral $\int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dydx$ se escribe en la forma $\int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\, dy$. En este caso, se comienza por resolver la integral de la derecha y se procede marcha atrás.*

## 12.3. CAMBIOS DE VARIABLE

Si en $\iint_S f(x, y)\, dxdy$ se hace un cambio de las variables $(x, y)$ a las nuevas variables $(u, v)$, relacionadas según:

$$\left.\begin{aligned} x &= g_1(u, v) \\ y &= g_2(u, v) \end{aligned}\right\}$$

donde $g_1(u, v)$ y $g_2(u, v)$ son funciones continuas, con derivadas parciales continuas y exite una correspondencia biunívoca entre los recintos $S$ de $(x, y)$ y $S^*$ de $(u, v)$ (la correspondencia $T : S \to S^*$ es biyectiva) (Sección 1.6), resulta:

$$\iint_S f(x, y)\, dxdy = \iint_{S^*} f[g_1(u, v), g_2(u, v)]\, |J|\, dudv$$

donde:

$$|J| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

es el valor absoluto del determinante llamado *jacobiano*.

Por ejemplo, si se quiere pasar de coordenadas cartesianas $(x, y)$ a coordenadas polares $(\rho, \theta)$ (Sección 11.5):

$$\left.\begin{aligned} x &= \rho \cos\theta \\ y &= \rho \operatorname{sen}\theta \end{aligned}\right\}$$

El jacobiano:

$$|J| = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\ \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \rho\ \cos\theta \end{vmatrix} = \rho$$

Por tanto:

$$\iint_S f(x, y)\, dx\, dy = \iint_{S^*} f(\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta)\rho\, d\rho\, d\theta$$



## 12.4. LA INTEGRAL TRIPLE

Si el dominio de integración $S$ es un sólido de $\mathbb{R}^3$ y el integrando es una función de tres variables, $f(x, y, z)$, definida y acotada en dicho sólido, la integral triple se representa:

$$\iiint_S f(x, y, z)\, dxdydz$$

Si dicho dominio $S$ es un ortoedro $S = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$, de forma análoga a la integral doble:

$$\iiint_S f(x, y, z)\, dxdydz = \int_{a_1}^{b_1} \Big[ \int_{a_2}^{b_2} \Big[ \int_{a_3}^{b_3} f(x, y, z)\, dz \Big] dy \Big] dx$$

**Ejemplo 12.1** Sea la función $f(x, y, z) = x + y + z$, definida en $S = [0, 1] \times [0, 2] \times [0, 3]$, entonces:

$$\iiint_S f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \left[\int_0^1 \left[\int_0^2 \left[\int_0^3 (x + y + z)\, dz\right] dy\right]\right] dx$$

$$= \left[\int_0^1 \left[\int_0^2 \left[xz + yz + \frac{z^2}{2}\right]_0^3 dy\right] dx = \int_0^1 \left[\int_0^2 \left(3x + 3y + \frac{9}{2}\right) dy\right] dx\right.$$

$$= \int_0^1 \left[3xy + \frac{3y^2}{2} + \frac{9y}{2}\right]_0^2 dx = \int_0^1 (6x + 6 + 9)\, dx = [3x^2 + 15x]_0^1 = 18$$

● NOTA *Si* $f(x, y, z) = 1$, *la integral triple* $\iiint_S dx\,dy\,dz$ *representa el volumen del sólido S.*

## 12.5. CÁLCULO DE LA INTEGRAL TRIPLE

Para calcular una integral triple, el dominio $S$ se describe del modo siguiente:

1. Los límites de integración de la primera integral de la izquierda serán dos constantes numéricas.
2. Los límites de integración de la segunda integral serán dos funciones continuas de la variable anterior.
3. Los límites de integración de la tercera integral serán dos funciones continuas de las variables anteriores.

**EJEMPLO 12.2** Calcular:

$$\iiint_S \frac{1}{(x+y+z+1)^3}\,dx\,dy\,dz$$

siendo $S$ la región limitada por los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$ (ver Figura 12.6).

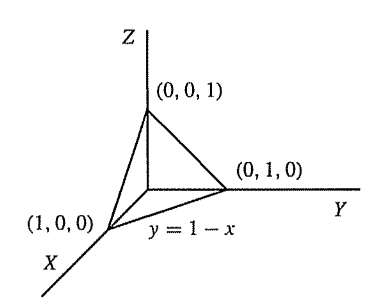



**Figura 12.6**

Los puntos de corte del plano $x + y + z = 1$ con los ejes de coordenadas son los puntos $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$. La ecuación de la recta que pasa por $(1, 0, 0)$ y $(0, 1, 0)$ es $y = 1 - x$. Por tanto:

$$\int_0^1\left[\int_0^{1-x}\left[\int_0^{1-x-y}\frac{1}{(x+y+z+1)^3}\,dz\right]dy\right]dx = \int_0^1\left[\int_0^{1-x}\left[-\frac{1}{2}\,\frac{1}{(x+y+z+1)^2}\right]_0^{1-x-y}dy\right]dx$$

$$= \int_0^1\left[\int_0^{1-x} -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{(x+y+1)^2}\right)dy\right]dx$$

$$= \int_0^1\left[-\frac{y}{8}-\frac{1}{2(x+y+1)}\right]_0^{1-x}dx$$

$$= \int_0^1\left(-\frac{1-x}{8}-\frac{1}{4}+\frac{1}{2(x+1)}\right)dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{16}-\frac{3x}{8}+\frac{1}{2}\ln|x+1|\right]_0^1 = -\frac{5}{16}+\frac{1}{2}\ln 2$$

## 12.6. COORDENADAS CILÍNDRICAS Y ESFÉRICAS

Sea el punto $P(x, y, z)$ en coordenadas cartesianas. Si las coordenadas polares del punto proyección de $P$ sobre el plano horizontal $XY$ son $(r, \theta)$, el punto $P$ queda determinado por la terna $(r, \theta, z)$, que son las llamadas *coordenadas cilíndricas* de P (ver Figura 12.7).

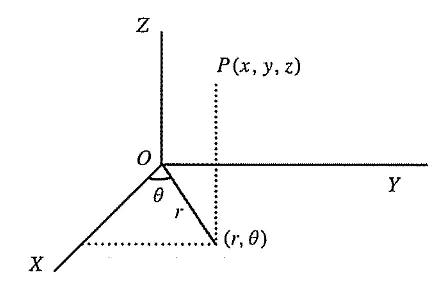



**Figura 12.7**

La relación entre las coordenadas cilíndricas y cartesianas viene dada por las fórmulas:

$$x = r \cdot \cos\theta; \quad y = r \cdot \operatorname{sen}\theta; \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad \operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x}$$

con $r \geq 0$ y $0 \leq \theta < 2\pi$.

● NOTA *El cambio a coordenadas cilíndricas está principalmente indicado cuando el recinto de integración es cilíndrico o en el integrando aparece una expresión de la forma $x^2 + y^2$ (ver Problemas Resueltos).*

## COORDENADAS ESFÉRICAS

El punto $P$, de coordenadas cartesianas $(x, y, z)$, puede ser expresado mediante las llamadas coordenadas esféricas $(\rho, \theta, \varphi)$, con $\rho \geq 0$, $-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$ y $\theta \in [0, 2\pi)$, siendo $\rho$ el módulo del vector $\overrightarrow{OP}$, y $\theta$ y $\varphi$ los ángulos que forma la proyección de $\overrightarrow{OP}$ sobre el plano $XY$, con el eje $OX$ y con dicho vector $\overrightarrow{OP}$, respectivamente.

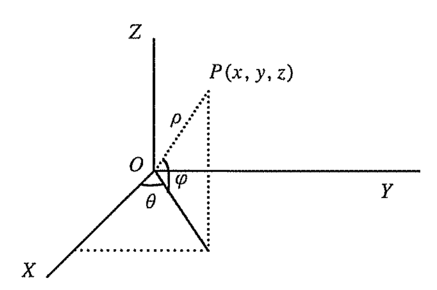



**Figura 12.8**

Las relación entre las coordenadas cartesianas y esféricas viene dada por las fórmulas:

$$\begin{aligned} x &= \rho \cdot \cos\varphi \cdot \cos\theta \\ y &= \rho \cdot \cos\varphi \cdot \operatorname{sen}\theta \\ z &= \rho \cdot \operatorname{sen}\varphi \\ \rho^2 &= x^2 + y^2 + z^2 \end{aligned}$$

con $\rho \geq 0$, $\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$ y $\theta \in [0, 2\pi)$.

● NOTA *El cambio a coordenadas esféricas está indicado cuando el recinto de integración es esférico o cónico (ver Problemas Resueltos).*

## 12.7. CAMBIOS DE VARIABLE.

Si en:

$$\iiint_S f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

se hace un cambio de las variables $(x, y, z)$ a las nuevas variables $(u, v, w)$, relacionadas según:

$$\left.\begin{aligned} x &= g_1(u, v, w) \\ y &= g_2(u, v, w) \\ z &= g_3(u, v, w) \end{aligned}\right\}$$

de modo que:

- Las funciones $g_1(u, v, w)$, $g_2(u, v, w)$ y $g_3(u, v, w)$ tienen derivadas parciales continuas.
- Entre los dominios $S$ y $S^*$, de $(x, y, z)$ y $(u, v, w)$, existe una correspondencia biunívoca (la correspondencia $T : S \to S^*$ es biyectiva), entonces:

$$\iiint_S f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iiint_{S^*} f[g_1(u, v, w), g_2(u, v, w), g_3(u, v, w)]|J|\, du\, dv\, dw$$

donde:

$$|J| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial w} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial w} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

es el valor absoluto del *jacobiano*.

Por ejemplo, si se quiere pasar de coordenadas cartesianas $(x, y, z)$ a coordenadas cilíndricas $(r, \theta, z)$, el jacobiano es:

$$|J| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial x}{\partial z} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial z}{\partial r} & \dfrac{\partial z}{\partial \theta} & \dfrac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r \operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & r \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

Por tanto:

$$\iiint_S f(x, y)\, dx\, dy\, dz = \iiint_{S^*} f(r\cos\theta, r \operatorname{sen}\theta, z) r\, dr\, d\theta\, dz$$

(Ver ejercicios resueltos).

Si se desea pasar de coordenadas cartesianas $(x, y, z)$ a coordenadas esféricas $(\rho, \theta, \varphi)$, el jacobiano es:

$$|J| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \rho} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \rho} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial z}{\partial \rho} & \dfrac{\partial z}{\partial \theta} & \dfrac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi\cos\theta & -\rho\cos\varphi \operatorname{sen}\theta & -\rho \operatorname{sen}\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi \operatorname{sen}\theta & \rho\cos\varphi\cos\theta & -\rho \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\varphi & 0 & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho^2\cos\varphi$$

Por tanto:

$$\iiint_S f(x, y)\, dx\, dy\, dz = \iiint_{S^*} f(\rho\cos\varphi\cos\theta, \rho\cos\varphi \operatorname{sen}\theta, \rho \operatorname{sen}\varphi)\rho^2\cos\varphi\, d\rho\, d\theta\, d\varphi$$

(Ver ejercicios resueltos).

# PROBLEMAS RESUELTOS

**12.1.** Calcular $\int_1^2 \int_2^4 (x+2y)\, dxdy$.

**Resolución**

$$\int_1^2 \left[\int_2^4 (x+2y)\, dx\right] dy = \int_1^2 \left[\frac{x^2}{2} + 2xy\right]_2^4 dy = \int_1^2 (8+8y-2-4y)\, dy = [6y+2y^2]_1^2 = 12$$

**12.2.** Hallar el área limitada por $y = \dfrac{4x}{5}$, el eje $OX$ y la recta $x=5$, mediante una integral doble.

**Resolución**

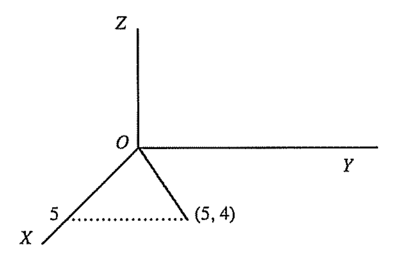



**Figura 12.9**

$$A = \int_0^5 \left[\int_0^{4x/5} dy\right] dx = \int_0^5 [y]_0^{4x/5}\, dx = \int_0^5 \frac{4x}{5}\, dx = 10 \text{ u. s.}$$

**12.3.** Hallar el área limitada por la curva $y = 4 \operatorname{sen} \dfrac{x}{2}$, entre $x = \dfrac{\pi}{3}$ y $x = \pi$, mediante una integral doble.

**Resolución**

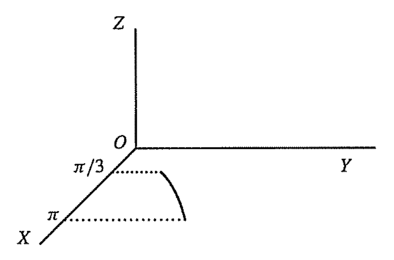



**Figura 12.10**

$$A = \int_{\pi/3}^{\pi} \left[\int_0^{4 \operatorname{sen} x/2} dy\right] dx = \int_{\pi/3}^{\pi} 4 \operatorname{sen} \frac{x}{2}\, dx = \left[-8 \cos \frac{x}{2}\right]_{\pi/3}^{\pi} = 4\sqrt{3} \text{ u. s.}$$

**12.4.** Hallar el área limitada por las curvas $y^2 = 9x$ e $y = \dfrac{x^2}{9}$, mediante una integral doble.

**Resolución**

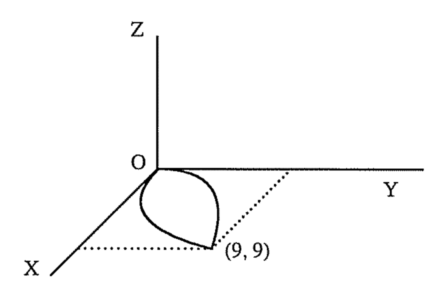



**Figura 12.11**

$$A = \int_0^9 \int_{x^2/9}^{\sqrt{9x}} dy\, dx = \int_0^9 [y]_{x^2/9}^{\sqrt{9x}}\, dx = \int_0^9 \left(\sqrt{9x} - \frac{x^2}{9}\right) dx = 27 \text{ u. s.}$$

**12.5.** Calcular:

$$\iint_S \sqrt{1 - x^2 - y^2}\, dx\, dy$$

donde $S$ es el círculo de centro el origen y radio 1.

**Resolución**

Se pasa a coordenadas polares:

$$\left.\begin{aligned} x &= \rho \cos\theta \\ y &= \rho \operatorname{sen}\theta \end{aligned}\right\}$$

resultando:

$$\begin{aligned}\iint_S \sqrt{1 - x^2 - y^2}\, dx\, dy &= \int_0^{2\pi} \left[\int_0^1 \sqrt{1 - \rho^2 \cos^2\theta - \rho^2 \operatorname{sen}^2\theta}\, \rho\, d\rho\right] d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\int_0^1 \rho\sqrt{1 - \rho^2}\, d\rho\right] d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[-\int_1^0 t^2\, dt\right] d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[-\frac{t^3}{3}\right]_1^0 d\theta = \frac{2\pi}{3}\end{aligned}$$

mediante el cambio de variable $1 - \rho^2 = t^2 \Longrightarrow -\rho\, d\rho = t\, dt$.

**12.6.** Calcular:

$$\iint_S e^{\frac{y-x}{y+x}}\, dx\, dy$$

siendo $S$ el triángulo formado por los ejes de coordenadas y la recta $x + y = 1$, y haciendo el cambio de variables:

$$\left.\begin{aligned} y - x &= u \\ y + x &= v \end{aligned}\right\}$$

### Resolución

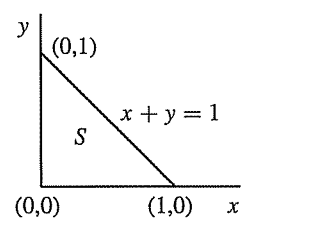
Despejando $x$ e $y$ en función de $u$ y $v$:

$$\left.\begin{aligned} y - x = u \\ y + x = v \end{aligned}\right\} \Longrightarrow x = \frac{v-u}{2}, \quad y = \frac{u+v}{2}$$

Es necesario hallar el nuevo recinto $S^*$ para las variables $u$ y $v$. Para ello, se hallan las imágenes de los lados $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$, del triángulo $S$:

$$\begin{aligned} x = 0 &\Longrightarrow & \frac{v-u}{2} = 0 &\Longrightarrow u = v \\ y = 0 &\Longrightarrow & \frac{u+v}{2} = 0 &\Longrightarrow u = -v \\ x + y = 1 &\Longrightarrow & \frac{v-u}{2} + \frac{u+v}{2} = 1 &\Longrightarrow v = 1 \end{aligned}$$

Gráficamente:



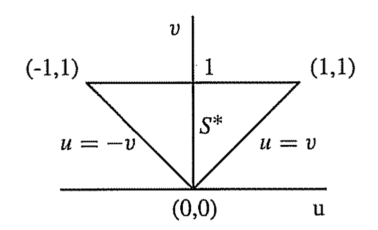




**Figura 12.12**

El jacobiano:

$$|J| = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} \iint_S e^{\frac{y-x}{y+x}}\,dx\,dy &= \iint_{S^*} e^{\frac{u}{v}}\frac{1}{2}\,du\,dv = \int_0^1\int_{-v}^{v}\frac{1}{2}e^{\frac{u}{v}}\,du\,dv \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1\left[ve^{\frac{u}{v}}\right]_{-v}^{v}dv = \frac{1}{2}\int_0^1\left(ve - \frac{v}{e}\right)dv = \frac{1}{4}\left(e - \frac{1}{e}\right) \end{aligned}$$

**12.7.** Calcular el volumen de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, mediante integrales dobles.

### Resolución

Se trata de una esfera de centro el origen de coordenadas y radio igual a $r$. Considerando únicamente el primer octante, $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; 0 \le x \le r,\; 0 \le y \le \sqrt{r^2 - x^2}\}$.

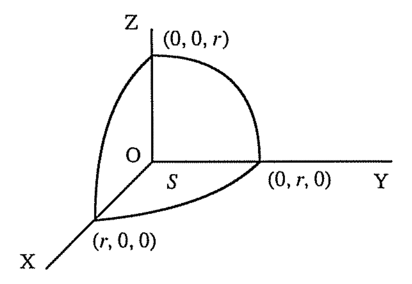



**Figura 12.13**

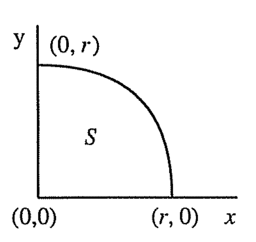
El volumen total de la esfera será:

$$8\iint_S \sqrt{r^2-x^2-y^2}\,dy\,dx = 8\int_0^r \int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} \sqrt{r^2-x^2-y^2}\,dy\,dx$$

Se pasa a coordenadas polares. Es necesario hallar el nuevo recinto $S^*$ para las variables $\rho$ y $\theta$. Para ello, se halla la imagen del cuadrante de círculo $x^2+y^2=r^2$:

$$x^2+y^2=r^2 \Longrightarrow \rho^2\cos^2\theta+\rho^2\operatorname{sen}^2\theta=r^2 \Longrightarrow \rho^2(\cos^2\theta+\operatorname{sen}^2\theta)=r^2$$
$$\Longrightarrow \rho=r,\ 0\le\rho\le r,\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$$

Gráficamente:



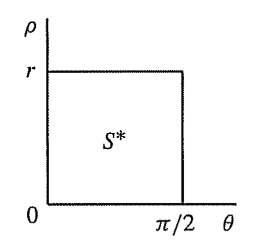




**Figura 12.14**

Por tanto, $S^*=\{(\rho,\theta)\ /\ 0\le\rho\le r,\ 0\le\theta\le\pi/2\}$, y:

$$V=8\int_0^r\int_0^{\pi/2}\rho\sqrt{r^2-\rho^2}\,d\theta\,d\rho = 8\int_0^r\left[\rho\sqrt{r^2-\rho^2}\cdot\theta\right]_0^{\pi/2}d\rho$$
$$=4\pi\int_0^r\rho\sqrt{r^2-\rho^2}\,d\rho=-4\pi\int_r^0 t^2\,dt=\frac{4\pi r^3}{3}\ \text{u. v.}$$

haciendo el cambio $r^2-\rho^2=t^2$.

**12.8.** Calcular:

$$\iint_S e^{x+y}\,dx\,dy$$

siendo $S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ /\ |x|+|y|\le 1\}$.

### Resolución

Se divide el recinto $S$ en dos recintos $S_1$ y $S_2$, a izquierda y derecha del origen de coordenadas:

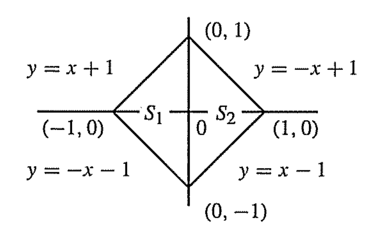



**Figura 12.15**

$$\begin{aligned}
\iint_{S_1} e^{x+y}\,dx\,dy + \iint_{S_2} e^{x+y}\,dx\,dy &= \int_{-1}^{0}\int_{-x-1}^{x+1} e^{x+y}\,dy\,dx + \int_{0}^{1}\int_{x-1}^{-x+1} e^{x+y}\,dy\,dx \\
&= \int_{-1}^{0}\left[e^{x+y}\right]_{-x-1}^{x+1} dx + \int_{0}^{1}\left[e^{x+y}\right]_{x-1}^{-x+1} dx \\
&= \int_{-1}^{0}\left(e^{2x+1} - e^{-1}\right) dx + \int_{0}^{1}\left(e - e^{2x-1}\right) dx \\
&= \left[\frac{e^{2x+1}}{2} - \frac{x}{e}\right]_{-1}^{0} + \left[ex - \frac{e^{2x-1}}{2}\right]_{0}^{1} = \frac{e^2-1}{e}
\end{aligned}$$

**12.9.** Una pirámide está limitada por los planos coordenados y el plano $x + 2y + 3z - 6 = 0$. Calcular su volumen mediante integración doble.

### Resolución

Los puntos de corte del plano $x+2y+3z-6=0$ con los ejes de coordenadas son los puntos $(6, 0, 0)$, $(0, 3, 0)$ y $(0, 0, 2)$. El recinto $S$ está limitado por los ejes $X$ e $Y$, y la recta que une los puntos $(6, 0, 0)$ y $(0, 3, 0)$ es:

$$y = \frac{6-x}{2}$$

$$\begin{aligned}
V &= \iint_S \frac{6-x-2y}{3}\,dx\,dy = \int_0^6 \int_0^{\frac{6-x}{2}} \frac{6-x-2y}{3}\,dy\,dx \\
&= \int_0^6 \left[\frac{1}{3}(6y - xy - y^2)\right]_0^{\frac{6-x}{2}} dx = \frac{1}{3}\int_0^6 \left(6\,\frac{6-x}{2} - x\,\frac{6-x}{2} - \left(\frac{6-x}{2}\right)^2\right) dx = 6 \text{ u. s.}
\end{aligned}$$

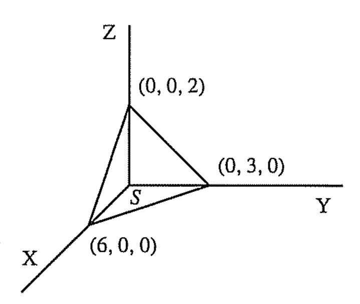



**Figura 12.16**

**12.10.** Dibujar la región del plano que da lugar a las integrales siguientes y cambiar el orden de integración en cada una de ellas:

a) $\displaystyle\int_0^1 \int_{x^4}^{x^2} f(x,y)\,dy\,dx.$

b) $\displaystyle\int_0^1 \int_{-y}^{y} f(x,y)\,dxdy.$

c) $\displaystyle\int_1^4 \int_{x}^{2x} f(x,y)\,dydx.$

### Resolución

a) $$\int_0^1 \int_{x^4}^{x^2} f(x,y)\,dy\,dx = \int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt[4]{y}} f(x,y)\,dx\,dy.$$

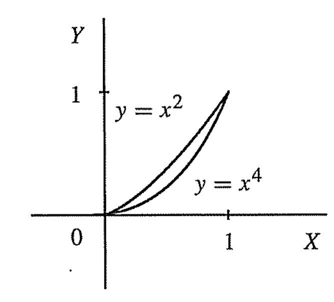



**Figura 12.17**

b) $$\int_0^1 \int_{-y}^{y} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-1}^0 \int_{-x}^{1} f(x,y)\,dy\,dx + \int_0^1 \int_{x}^{1} f(x,y)\,dy\,dx.$$

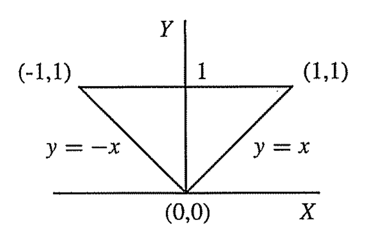



**Figura 12.18**

c) $$\int_1^4 \int_{x}^{2x} f(x,y)\,dy\,dx = \int_1^2 \int_1^{y} f(x,y)\,dx\,dy + \int_2^4 \int_{y/2}^{y} f(x,y)\,dx\,dy + \int_4^8 \int_{y/2}^{4} f(x,y)\,dx\,dy.$$

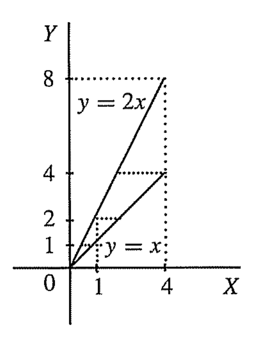



**Figura 12.19**

**12.11.** Calcular:

$$\int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 \frac{1}{\sqrt{x+y^2}}\,dy\,dx$$

### Resolución

El recinto de integración es el de la Figura 12.20. La integral no es fácil.

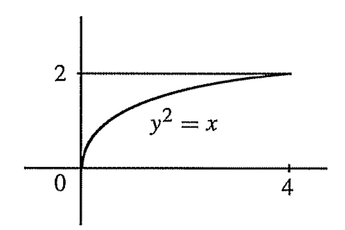



**Figura 12.20**

Cambiando el orden de integración:

$$\int_0^2 \int_0^{y^2} \frac{1}{\sqrt{x+y^2}}\,dx\,dy = \int_0^2 \left[2\sqrt{x+y^2}\right]_0^{y^2} dy$$

$$= \int_0^2 \left(2\sqrt{2y^2} - 2\sqrt{y^2}\right) dy$$

$$= (2\sqrt{2}-2)\int_0^2 y\,dy = 4(\sqrt{2}-1)$$

**12.12.** Hallar mediante integración doble la superficie limitada por las parábolas $3y^2 = 25x$ y $5x^2 = 9y$: a) integrando respecto a $y$ en primer lugar; y b) integrando respecto a $x$ en primer lugar.

### Resolución

$$\int_0^3 \int_{5x^2/9}^{\sqrt{25x/3}} dy\,dx = \int_0^3 \left(\sqrt{\frac{25\,x}{3}} - \frac{5x^2}{9}\right) dy\,dx = \left[\frac{10\sqrt{x^3}}{3\sqrt{3}} - \frac{5x^3}{27}\right]_0^3 = 10-5 = 5 \text{ u. s.}$$

$$\int_0^5 \int_{3y^2/25}^{\sqrt{9y/5}} dx\,dy = \int_0^5 \left(\sqrt{\frac{9y}{5}} - \frac{3y^2}{25}\right) dy = \left[\frac{6\sqrt{y^3}}{3\sqrt{5}} - \frac{y^3}{25}\right]_0^5 = \frac{30\sqrt{5}}{3\sqrt{5}} - \frac{5^3}{25} = 5 \text{ u. s.}$$

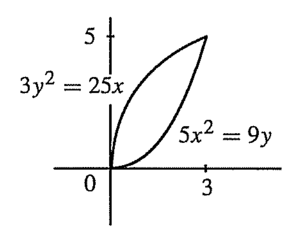



**Figura 12.21**

**12.13.** Calcular:

$$\iiint_S yz\, dz\, dy\, dx$$

siendo $S$ el sólido del primer octante definido por:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

**Resolución**

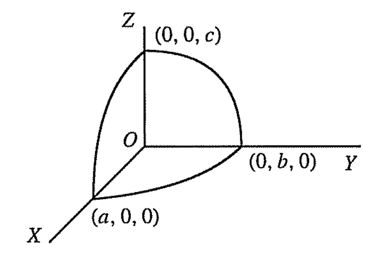



**Figura 12.22**

La intersección de $S$ con el plano $XY$ es la elipse de ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

$$\int_0^a \int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} \int_0^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} yz\, dz\, dy\, dx = \int_0^a \int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} \left[ y\frac{z^2}{2} \right]_0^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} dy\, dx$$

$$= \frac{c^2}{2} \int_0^a \int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} \left( y - \frac{x^2 y}{a^2} - \frac{y^3}{b^2} \right) dy\, dx$$

$$= \frac{c^2}{2} \int_0^a \left[ \frac{y^2}{2} - \frac{x^2 y^2}{2a^2} - \frac{y^4}{4b^2} \right]_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} dx$$

$$= \frac{b^2 c^2}{4} \int_0^a \left( \frac{1}{2} - \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^4}{2a^4} \right) dx = \frac{ab^2c^2}{15}$$

**12.14.** Calcular $\int_0^{\sqrt{\pi/2}} \int_x^{\sqrt{\pi/2}} \int_1^3 \operatorname{sen} y^2\, dz\, dy\, dx$

**Resolución**

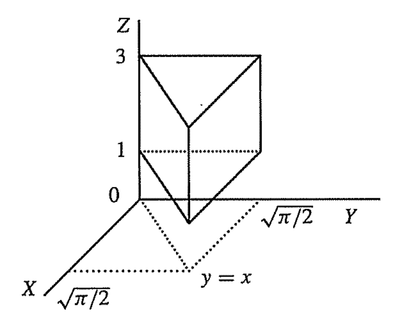



**Figura 12.23**

Siguiendo el orden de integración propuesto, la segunda integral no tiene primitiva elemental. Es preciso invertir el orden de integración.

$$\int_0^{\sqrt{\pi/2}}\int_0^y\int_1^3 \operatorname{sen} y^2\,dz\,dx\,dy = \int_0^{\sqrt{\pi/2}}\int_0^y [z\cdot\operatorname{sen} y^2]_1^3\,dx\,dy = 2\int_0^{\sqrt{\pi/2}}\int_0^y \operatorname{sen} y^2\,dx\,dy$$
$$= 2\int_0^{\sqrt{\pi/2}} [x\cdot\operatorname{sen} y^2]_0^y\,dy = 2\int_0^{\sqrt{\pi/2}} y\cdot\operatorname{sen} y^2 dy$$
$$= [-\cos y^2]_0^{\sqrt{\pi/2}} = 1$$

**12.15.** Sin realizar las integrales, describir el dominio de integración y reescribir las integrales en el orden indicado:

a) $\displaystyle\int_0^1\int_0^y\int_0^{\sqrt{1-y^2}} dzdx\,dy$, en el orden $z, y, x$.

b) $\displaystyle\int_0^4\int_0^{\frac{4-x}{2}}\int_0^{\frac{12-3x-6y}{4}} dz\,dy\,dx$, en el orden $y, x, z$.

### Resolución

a) El recinto es tal que $0\le y\le 1, 0\le x\le y, 0\le z\le\sqrt{1-y^2}$. Gráficamente:

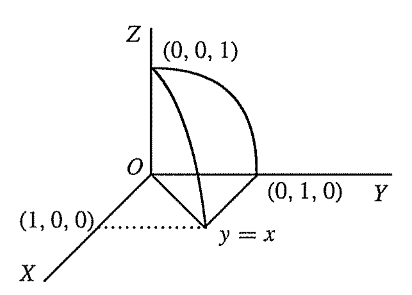



**Figura 12.24**

puesto que $z=\sqrt{1-y^2}\Longrightarrow y^2+z^2=1$. Por tanto, $z\le\sqrt{1-y^2}$ es el interior del círculo $y^2+z^2=1$. Cambiando el orden:

$$\int_0^1\int_x^1\int_0^{\sqrt{1-y^2}} dz\,dy\,dx$$

b) En este caso: $0\le x\le 4, 0\le y\le\dfrac{4-x}{2}, 0\le z\le\dfrac{12-3x-6y}{4}$. Gráficamente:

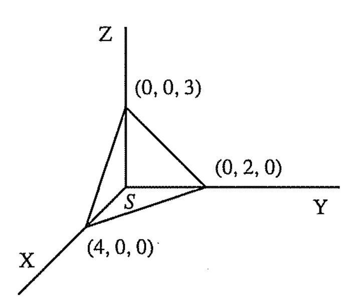



**Figura 12.25**

La recta contenida en el plano coordenado $XZ$, que pasa por los puntos $(4, 0, 0)$ y $(0, 0, 3)$ tiene por ecuación:

$$\frac{x-4}{4} = \frac{z}{-3} \Longrightarrow 3x + 4z - 12 = 0$$

Cambiando el orden de integración:

$$\int_0^3 \int_0^{\frac{12-4z}{3}} \int_0^{\frac{12-3x-4z}{6}} dy\,dx\,dz$$

**12.16.** Hallar el volumen del recinto $S$ limitado por el cono $z^2 = x^2 + y^2$, y los planos $z = 0$ y $z = 3$.

**Resolución**

El volumen $V = \iiint_S dx\,dy\,dz$.

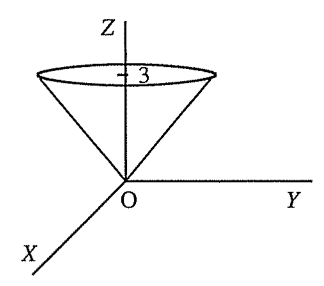



**Figura 12.26**

En coordenadas cilíndricas $(r, \theta, z)$, el dominio será $\{(r, \theta, z),\ /\ 0 \le r \le 3,\ 0 \le \theta \le 2\pi,\ \sqrt{x^2 + y^2} = r \le z \le 3\}$. Por tanto:

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \int_0^3 \int_r^3 r\,dz\,dr\,d\theta &= \int_0^{2\pi} \int_0^3 [rz]_r^3\,dr\,d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^3 (3r - r^2)\,dr\,d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{9}{2}\,d\theta = 9\pi \text{ u. v.}\end{aligned}$$

**12.17.** Hallar el volumen del sólido $S$ limitado por el cilindro $x^2 + y^2 = 4$, y los planos $y + z = 4$ y $z = 0$.

**Resolución**

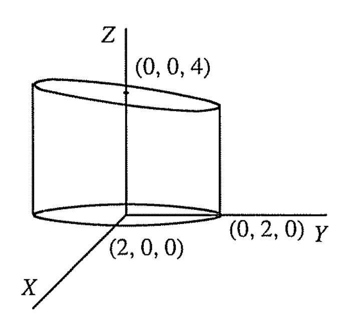



**Figura 12.27**

$$V = \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{+\sqrt{4-x^2}}\int_{0}^{4-y} dz\,dy\,dx = \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{+\sqrt{4-x^2}} (4-y)\,dy\,dx$$
$$= \int_{-2}^{2}\left[4y - \frac{y^2}{2}\right]_{-\sqrt{4-x^2}}^{+\sqrt{4-x^2}} dx = 8\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx = 16\pi \text{ u. v.}$$

haciendo el cambio $x = 2\,\operatorname{sen} t$.

Podría hacerse en coordenadas cilíndricas $(r, \theta, z)$. El nuevo dominio sería $\{(r,\theta,z)\ /\ 0 \le r \le 2,\ 0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le z \le 4 - r \cdot \operatorname{sen}\theta\}$. Por tanto:

$$V = \int_0^2\int_0^{2\pi}\int_0^{4-r\operatorname{sen}\theta} r\,dz\,d\theta dr = 16\pi \text{ u. v.}$$

**12.18.** Calcular:

$$I = \iiint_S \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}}\,dx\,dy\,dz$$

siendo $S$ el elipsoide:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

mediante los cambios de variable $x = au$, $y = bv$, $z = cw$.

### Resolución

Considerando únicamente el primer octante, el recinto $S$ es el elipsoide de la Figura 12.28:

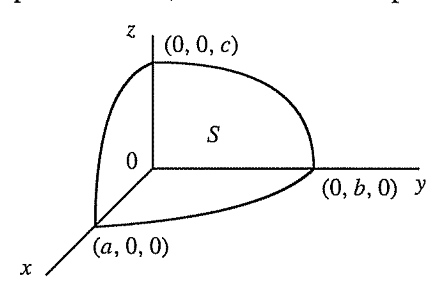



**Figura 12.28**

Mediante los cambios $x = au$, $y = bv$, $z = cw$, el nuevo recinto $S^*$ es la esfera $u^2 + v^2 + w^2 = 1$:

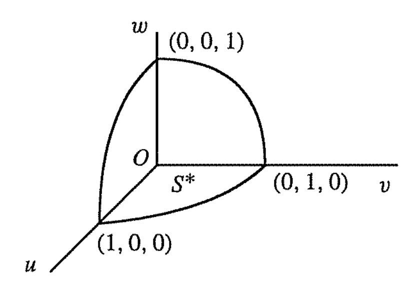



**Figura 12.29**

$$I = \iiint_{S^*} \sqrt{1 - u^2 - v^2 - w^2}abc\,du\,dv\,dw$$

siendo el jacobiano:

$$|J| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial w} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial w} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = abc$$

Pasando a coordenadas esféricas:

$$\begin{aligned} I &= 8\int_0^1\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\rho^2}\cdot abc\cdot\rho^2\cos\varphi\,d\varphi\,d\theta\,d\rho \\ &= 8abc\int_0^1\int_0^{\pi/2}\left[\sqrt{1-\rho^2}\cdot abc\cdot\rho^2\,\text{sen}\,\varphi\right]_0^{\pi/2}d\theta\,d\rho \\ &= 8abc\int_0^1\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\rho^2}\rho^2\,d\theta\,d\rho = 8abc\int_0^1\left[\theta\sqrt{1-\rho^2}\rho^2\right]_0^{\pi/2}d\rho \\ &= 4\pi abc\int_0^{\pi/2}\cos^2 t\,\text{sen}^2 t\,dt = \pi abc\int_0^{\pi/2}\text{sen}^2 2t\,dt \\ &= \pi abc\int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos 4t}{4}\,dt = \frac{\pi^2 abc}{4} \end{aligned}$$

haciendo $\rho = \text{sen}\,t \Longrightarrow d\rho = \cos t\,dt$.

# PROBLEMAS PROPUESTOS

**12.19.** Calcular $\iint_S (x^2-y)\,dy\,dx$, siendo $S$ la región comprendida entre las gráficas de las curvas $y=x^2$, $y=-x^2$, $x=1$, $x=-1$.

**12.20.** Hallar $\iint_S xy\,dx\,dy$, siendo $S$ la región del primer cuadrante limitada por las curvas $y=x^2$ e $y^2=x$.

**12.21.** Hallar el área de una elipse de semiejes a y b, mediante integración doble.

**12.22.** Hallar el área limitada por las curvas $x^2+y^2=10$ e $y^2=9x$, mediante integración doble.

**12.23.** Calcular $\int_0^1\int_{3y}^3 e^{x^2}\,dx\,dy$, invirtiendo el orden de integración.

**12.24.** Calcular $\int_0^1\int_{\sqrt{x}}^1 e^{y^3}\,dy\,dx$.

**12.25.** Calcular $\int_1^2\int_0^{\ln y} e^{-x}\,dx\,dy$. Hacerla de nuevo invirtiendo el orden.

**12.26.** Sea $S$ el paralelogramo limitado por $y=-x$, $y=-x+1$, $y=2x$, $y=2x-3$. Hallar:

$$\iint_S (x+y)^2\,dx\,dy$$

mediante los cambios $u = x + y$, $v = 2x - y$.

**12.27.** Sea $S$ la región del primer cuadrante limitada por $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 9$, $x^2 - y^2 = 4$, $x^2 - y^2 = 1$. Hallar $\iint_S xy\,dx\,dy$.

**12.28.** Sea $S$ la región del primer octante limitada por la función $x^2 + y^2 + z^2 = 9$. Hallar $\iiint_S xyz\,dx\,dy\,dz$.

**12.29.** Hallar el volumen del sólido limitado superiormente por el cilindro $x^2 + z = 4$, inferiormente por el plano $x + z = 2$, y lateralmente por los planos $y = 0$ e $y = 3$.

**12.30.** Calcular $\iiint_S x\,dx\,dy\,dz$, siendo $S$ el recinto determinado por $x + z \leq 1$, $z \geq 0$, $x \geq y^2$ e $y \geq 0$.

**12.31.** Calcular $\iiint_S (x^2 + y^2)^2\,dx\,dy\,dz$, siendo $S$ el recinto determinado por $x^2 + y^2 = 2z$ y el plano $z = 2$.

**12.32.** Determinar el volumen común a los cilindros $x^2 + y^2 = a^2$, $x^2 + z^2 = a^2$.

**12.33.** Calcular $\iiint_S x^2\,dx\,dy\,dz$, siendo $S$ el recinto limitado por una esfera de centro el origen y radio $r$.

**12.34.** Dibujar el sólido que da lugar a la integral:

$$4\int_0^4 \int_0^{\sqrt{16-x^2}} \int_{\frac{x^2+y^2}{4}}^4 dz\,dy\,dx$$

y cambiar el orden de integración: a) $yxz$; y b) $xzy$.

**12.35.** Calcular la integral:

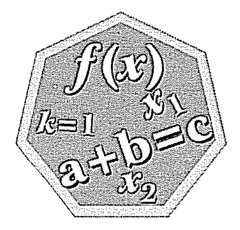
$$\iiint_S (y^2 + z^2)\,dx\,dy\,dz$$

siendo $S$ un cono de altura $h$ y base situada en el plano $XY$, radio $a$ y eje $OZ$.

**12.36.** Hallar el volumen del sólido limitado por el cilindro $z = 4 - x^2$ y el plano $y = 6$, en el primer octante.

**12.37.** Hallar el volumen del sólido limitado por el paraboloide $x^2 + y^2 = 4z$, el cilindro $x^2 + y^2 = 8y$ y el plano $z = 0$.

CAPÍTULO 13




# ECUACIONES DIFERENCIALES

El objeto de este capítulo es hacer una breve introducción al estudio de las ecuaciones diferenciales, que constituye una de las ramas más importantes del Cálculo, por sus innumerables aplicaciones en todas las ciencias.

## 13.1. INTRODUCCIÓN

● DEFINICIÓN 13.1 *Se llama ecuación diferencial a aquella ecuación que contiene derivadas.*

Si la ecuación posee más de una variable independiente, apareciendo así derivadas parciales, recibe el nombre de *ecuación diferencial en derivadas parciales*, para distinguirla de las *ecuaciones diferenciales ordinarias*, que son aquéllas que no tienen derivadas parciales.

● DEFINICIÓN 13.2 *Se llama orden de una ecuación diferencial al orden de la mayor derivada que aparezca en ella.*

● DEFINICIÓN 13.3 *Se llama grado de una ecuación diferencial al grado de la derivada de mayor orden que aparezca en ella.*

**EJEMPLO 13.1**

$$\frac{dy}{dx} = 3x - 2 \quad \text{(primer orden y primer grado)}$$
$$y'' + 2y' - 5 = 0 \quad \text{(segundo orden y primer grado)}$$
$$3(y'')^3 - (y')^5 = x \quad \text{(segundo orden y tercer grado)}$$

● DEFINICIÓN 13.4 *Se llama solución general de una ecuación diferencial a toda relación entre las variables, libre de derivadas, que satisface dicha ecuación diferencial. Por lo común, la solución general de una ecuación diferencial de orden n tiene n constantes. Integrar o resolver una ecuación diferencial es hallar su solución general.*

● DEFINICIÓN 13.5 *Se llama solución particular de una ecuación diferencial a aquella solución que se obtiene a partir de la solución general, dando valores a las constantes.*

**EJEMPLO 13.2** La ecuación diferencial $y' = 2x$ tiene por solución general $y = x^2 + C$. Dando valores a $C$ se obtiene la familia de parábolas de la figura:

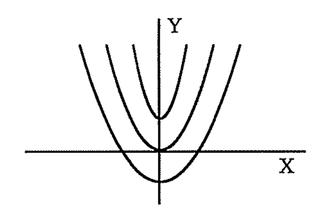



**Figura 13.1**

Para $C = 0$, se obtiene la solución particular $y = x^2$.

● DEFINICIÓN 13.6 *Dada la ecuación diferencial $y' = f(x, y)$, se dice que ésta está escrita en la forma estándar y, puesto que $y' = \dfrac{dy}{dx}$, se puede pasar a la forma:*

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

*llamada* forma diferencial *de la ecuación diferencial.*

## 13.2. TEOREMA DE EXISTENCIA Y UNICIDAD

■ TEOREMA 13.1 *Si $f(x, y)$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ son funciones continuas en un entorno del punto $(x_0, y_0)$, entonces la ecuación diferencial $y' = f(x, y)$ tiene una única solución, $y = \phi(x)$, que pasa por $(x_0, y_0)$.*

A la condición por la que la función debe tomar el valor $y_0$ para $x = x_0$, se le llama *condición inicial.*

**EJEMPLO 13.3** Sea la ecuación diferencial $y' = 2x+3y$. Evidentemente, la función $f(x, y) = 2x+3y$ es continua en todos los puntos del plano $XY$. Además, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 3$ es continua, por tanto, por cada punto $(x_0, y_0)$ pasa una única curva solución de la ecuación diferencial.

Las condiciones del anterior teorema no son necesarias, es decir, existen ecuaciones diferenciales que, a pesar de no verificar las condiciones de dicho teorema, poseen solución única para cada punto $(x_0, y_0)$.

Se va a ver ahora una serie de métodos de integración de ecuaciones diferenciales. Desgraciadamente, es muy reducido el número de ecuaciones diferenciales en las que, mediante manipulación e integración ordinaria, sea posible llegar a su solución general. En estos casos, será necesario utilizar métodos numéricos.

## 13.3. ECUACIÓN DIFERENCIAL DE VARIABLES SEPARADAS

Es de la forma:

$$f(x)\,dx + g(y)\,dy = 0$$

donde $f(x)$ y $g(y)$ son funciones sólo de $x$ y de $y$, respectivamente.

Su solución general es:

$$\int f(x)\,dx + \int g(y)\,dy = C$$

siendo $C$ una constante arbitraria.

**Ejemplo 13.4** Integrar la ecuación diferencial $x\,dx + y\,dy = 0$.

$$\int x\,dx + \int y\,dy = C \Longrightarrow \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C \Longrightarrow x^2 + y^2 = K$$

siendo $K = 2C$. Es una familia de círculos de centro $(0, 0)$ y radio $\sqrt{K}$.

## 13.4. ECUACIÓN DIFERENCIAL DE VARIABLES SEPARABLES

Es de la forma:

$$f_1(x)\,g_1(y)\,dx + f_2(x)\,g_2(y)\,dy = 0$$

Al dividir por $g_1(y)\,f_2(x)$, se obtiene:

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\,dx + \frac{g_2(y)}{g_1(y)}\,dy = 0$$

en la que las variables están separadas. La solución general será:

$$\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}\,dx + \int \frac{g_2(y)}{g_1(y)}\,dy = C$$

siendo $C$ una constante arbitraria.

**Ejemplo 13.5** Resolver la ecuación diferencial $y\,dx - x\,dy = 0$.

Es de variables separables: $\frac{1}{x}\,dx - \frac{1}{y}\,dy = 0$. Integrando: $\ln|x| - \ln|y| = \ln C$ o también:

$$\frac{x}{y} = C \Longrightarrow x = Cy$$

Para la constante arbitraria se ha preferido $\ln C$, en lugar de $C$.

## 13.5. ECUACIONES DIFERENCIALES HOMOGÉNEAS

● Definición 13.7 *Una función $f(x, y)$ es homogénea de grado $n$ si $f(kx, ky) = k^n f(x, y)$. La ecuación diferencial $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$ es homogénea de grado $n$ si $M(x, y)$ y $N(x, y)$ son funciones homogéneas del mismo grado $n$.*

Dada una ecuación diferencial homogénea, la sustitución:

$$y = vx \Longrightarrow dy = v\,dx + x\,dv$$

la convierte en una ecuación diferencial de variables separables.

**Ejemplo 13.6** Resolver $x\,dy + (x + y)\,dx = 0$.

Las funciones $M(x, y) = x + y$ y $N(x, y) = x$ son homogéneas de grado 1:

$$M(kx, ky) = kx + ky = k(x + y) = kM(x, y)$$

y

$$N(kx, ky) = kx = kN(x, y)$$

Por tanto, el cambio $y = vx$ transforma la ecuación en una ecuación diferencial de variables separables:

$$x(v\,dx + x\,dv) + (x + vx)\,dx = 0$$
$$x(1 + 2v)\,dx + x^2 dv = 0$$
$$\frac{1}{x}\,dx + \frac{1}{1+2v}\,dv = 0$$
$$\ln|x| + \frac{1}{2}\ln|1 + 2v| = \ln C$$

Quitando logaritmos, sustituyendo $v = \dfrac{y}{x}$ y elevando al cuadrado los dos miembros:

$$x^2\left(\frac{x+2y}{x}\right) = C^2 \Longrightarrow x^2 + 2xy = K$$

siendo $K = C^2$.

## 13.6. ECUACIONES DIFERENCIALES EXACTAS

● DEFINICIÓN 13.8 *Se dice que la ecuación diferencial $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$ es exacta si $M(x, y)$ y $N(x, y)$ son funciones continuas que verifican:*

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

*y entonces $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy$ es la diferencial total (Sección 11.10) de una función $z(x, y)$, y la ecuación diferencial tiene la solución general $z(x, y) = C$.*

**EJEMPLO 13.7** Integrar $(3x + y)\,dx + x\,dy = 0$.

Es exacta, ya que:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = 1$$

Entonces, el primer miembro de la ecuación diferencial será la diferencial total de una función $z(x, y)$. Por tanto, la función $M(x, y)$ será la derivada parcial, con respecto a $x$, de dicha función $z(x, y)$:

$$\frac{\partial z(x, y)}{\partial x} = M(x, y) = 3x + y$$

Integrando con respecto a $x$:

$$z(x, y) = \frac{3x^2}{2} + xy + h(y)$$

donde $h(y)$ es función únicamente de la variable $y$. Si se deriva parcialmente $z(x, y)$ con respecto a $y$, se obtendrá la función $N(x, y)$:

$$\frac{\partial z(x, y)}{\partial y} = x + h'(y) = N(x, y) = x \Longrightarrow h'(y) = 0 \Longrightarrow h(y) = C$$

Por tanto, $z(x, y) = \dfrac{3x^2}{2} + xy + C$.

La solución general será: $3x^2 + 2xy + K = 0$, siendo $K = 2C$.

## 13.7. ECUACIONES DIFERENCIALES DE FACTOR INTEGRANTE

● DEFINICIÓN 13.9 *A veces ocurre que la ecuación diferencial:*

$$M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0 \tag{13.1}$$

*no es exacta y, sin embargo, al multiplicarla por una función* $\phi(x, y)$*:*

$$\phi(x, y)\, M(x, y)\, dx + \phi(x, y)\, N(x, y)\, dy = 0 \tag{13.2}$$

*resulta ser exacta. Se dice entonces que* $\phi(x, y)$ *es un factor integrante de la ecuación diferencial y la solución de la ecuación* (13.2) *será también solución de la ecuación* (13.1).

El cálculo de factores integrantes es un problema bastante complejo. Se va a dar ahora algunos de ellos:

a) Si en (13.1) se verifica:

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N} = f(x)$$

siendo $f(x)$ función únicamente de la variable $x$, entonces $e^{\int f(x)dx}$ es un factor integrante de la ecuación diferencial (ver Problema resuelto 13.5).

b) Si en la ecuación (13.1) se verifica:

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{M} = -f(y)$$

siendo $f(y)$ función únicamente de la variable $y$, entonces $e^{\int f(y)dy}$ es un factor integrante de la ecuación diferencial.

c) Si en la ecuación (13.1) se verifica:

$$M(x, y) = yf(x, y) \quad \text{y} \quad N(x, y) = xg(x, y)$$

entonces $\dfrac{1}{xM - yN}$ es un factor integrante de la ecuación diferencial.

## 13.8. ECUACIÓN LINEAL

Es de la forma $y' + y\, P(x) = Q(x)$.

La función $\phi(x) = e^{\int P(x)dx}$ es un factor integrante de la ecuación diferencial y su solución general es:

$$ye^{\int P(x)dx} = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C$$

## 13.9. ECUACIÓN DE BERNOUILLI

Es de la forma $y' + y\, P(x) = y^n Q(x)$.

Mediante el cambio $y^{-n+1} = v$, se transforma en una ecuación lineal (Sección 13.8).

## 13.10. TRAYECTORIAS ORTOGONALES

Dada una familia de curvas $f(x, y, C) = 0$, se desea encontrar otra familia $F(x, y, C) = 0$, tal que para cada curva de la primera familia, que pasa por el punto $(x_0, y_0)$, exista otra curva de la segunda familia que pase también por dicho punto y sea ortogonal a ella [sus tangentes han de ser perpendiculares en $(x_0, y_0)$]. Es decir, si $\mu(x, y, y') = 0$ es una ecuación diferencial de $f(x, y, C) = 0$, entonces:

$$\phi\left(x, y, -\frac{1}{y'}\right) = 0$$

lo es de $F(x, y, C) = 0$, dado que las rectas tangentes en cada punto de intersección han de ser perpendiculares. Por tanto, dada una familia $f(x, y, C) = 0$, se obtiene la ecuación diferencial de la familia, se sustituye $y'$ por:

$$-\frac{1}{y'}$$

y se integra la ecuación diferencial resultante, obteniendo así las trayectorias ortogonales $F(x, y, C) = 0$.

**EJEMPLO 13.8** Hallar las trayectorias ortogonales de la familia $xy = C$.

Se halla la ecuación diferencial de la familia:

$$y\,dx + x\,dy = 0 \Longrightarrow y' = -\frac{y}{x}$$

Se sustituye $y'$ por $-\dfrac{1}{y'}$:

$$-\frac{1}{y'} = -\frac{y}{x} \Longrightarrow y' = \frac{x}{y} \Longrightarrow y\,dy = x\,dx \Longrightarrow \frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + K$$

Las trayectorias ortogonales serán las hipérbolas:

$$x^2 - y^2 = C$$

siendo $C = -2K$.



## 13.11. ECUACIONES LINEALES CON COEFICIENTES CONSTANTES

Son de la forma:

$$a_0 y^{(n} + a_1 y^{(n-1} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = P(x)$$

con $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ y $a_0 \neq 0$.

Considerando el operador $D = \dfrac{d}{dx}$, se tiene que $y' = \dfrac{dy}{dx} = Dy$, $y'' = D(Dy) = D^2 y, \ldots,$ y la ecuación diferencial puede escribirse en la forma:

$$a_0 D^n y + a_1 D^{n-1} y + \cdots + a_{n-1} Dy + a_n y = P(x)$$

o también:

$$(a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_{n-1} D + a_n) y = P(x)$$

donde el paréntesis puede considerarse como un polinomio cuya incógnita es el operador $D$ (llamado *polinomio característico*) y dicho polinomio se puede descomponer en factores:

$$a_0 (D - b_1)(D - b_2) \ldots (D - b_{n-1})(D - b_n)$$

Si el segundo miembro $P(x)$ es igual a cero, la ecuación diferencial recibe el nombre de *homogénea*, y su solución general es:

$$y = C_1 e^{b_1 x} + C_2 e^{b_2 x} + \cdots + C_n e^{b_n x}$$

**EJEMPLO 13.9** Resolver $y'' - 3y' + 2y = 0$.

Utilizando el operador $D = \dfrac{d}{dx}$, se puede escribir en la forma:

$$(D^2 - 3D + 2)y = (D-1)(D-2)y = 0$$

La solución general será:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$$

Si una raíz del polinomio característico es múltiple de orden $r$, por ejemplo $b_1$, entonces en la solución aparece la expresión:

$$C_1 e^{b_1 x} + C_2 x e^{b_1 x} + C_3 x^2 e^{b_1 x} + \cdots + C_r x^{r-1} e^{b_1 x}$$

**EJEMPLO 13.10** Resolver $y''' - 7y'' + 15y' - 9y = 0$.

Se escribe en la forma:

$$(D^3 - 7D^2 + 15D - 9)y = (D-3)^2(D-1)y = 0$$

La solución general es:

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x} + C_3 e^x$$

Si en el polinomio característico aparece la raíz compleja $a + bi$, también aparece la conjugada $a - bi$, y la solución general es:

$$\begin{aligned} y &= A_1 e^{(a+bi)x} + A_2 e^{(a-bi)x} \\ &= e^{ax}(A_1 e^{bxi} + A_2 e^{-bxi}) \\ &= e^{ax}[A_1(\cos bx + i \cdot \operatorname{sen} bx) + A_2(\cos bx + i \cdot \operatorname{sen} bx)] \\ &= e^{ax}(C_1 \cos bx + C_2 \operatorname{sen} bx) \end{aligned}$$

utilizando la *fórmula de Euler* (Sección 2.11).

**EJEMPLO 13.11** Resolver $y'' - 2y' + 2y = 0$.

Se escribe en la forma:

$$(D^2 - 2D + 2)y = 0$$

Las raíces son $1 \pm i$, y la solución general es:

$$y = e^x(C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x)$$

■ TEOREMA 13.2 *Si la ecuación diferencial lineal (no homogénea) de orden n:*

$$a_0 D^n y + a_1 D^{n-1} y + \cdots + a_{n-1} D y + a_n y = P(x)$$

*tiene una solución particular $y_p$, y la ecuación diferencial lineal homogénea tiene una solución general $y_h$, entonces su solución general es $y = y_h + y_p$.*

A continuación se va a ver un procedimiento, conocido como *método de variación de las constantes*, que permite calcular una solución particular $y_p$ cuando la solución general de la homogénea $y_h$ es conocida. De la solución general $y_h$ de la ecuación diferencial homogénea:

$$y_h = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \cdots + C_n y_n(x)$$

se obtiene la relación:

$$y_p = L_1 y_1(x) + L_2 y_2(x) + \cdots + L_n y_n(x)$$

sustituyendo las constantes $C_i$ por funciones desconocidas de $x$, llamadas $L_i$. El método permite hallar las funciones $L_i$, de forma que la relación anterior satisfaga la ecuación diferencial no homogénea. Se procede del modo siguiente:

1. Se escribe la solución general $y_h$ de la ecuación homogénea.
2. Se reemplazan en $y_n$ las $C_i$ por las $L_i$.
3. Se deriva $n$ veces la función $y_n$, igualando a cero los sumandos que contienen $L_i'$ a cero, salvo los de la última derivada, que se igualan a $P(x)$. Así, se obtiene $n$ ecuaciones que permiten hallar las $L_i$.
4. Se escribe la solución particular $y_p$, sustituyendo las $L_i$ en:

$$y_p = L_1 y_1(x) + L_2 y_2(x) + \cdots + L_n y_n(x)$$

(Ver problemas resueltos 13.12 y 13.13).

# PROBLEMAS RESUELTOS

**13.1.** Resolver $2y\,dx = x(y+2)\,dy$.

**Resolución**

Es una ecuación diferencial de variables separables. Dividiendo los dos miembros por $xy$:

$$\frac{2}{x}\,dx = \frac{y+2}{y}\,dy$$

Integrando:

$$2\ln|x| = y + 2\ln|y| + \ln C$$

Su solución general es:

$$x^2 = Cy^2e^y$$



**13.2.** Resolver $(x^2 - y^2)\,dx + 2xy\,dy = 0$.

**Resolución**

Las funciones $M(x, y) = x^2 - y^2$ y $N(x, y) = 2xy$ son homogéneas de grado 2:

$$M(kx, ky) = k^2x^2 - k^2y^2 = k^2(x^2 - y^2) = k^2M(x, y)$$

y

$$N(kx, ky) = 2kxky = k^2 \cdot 2xy = k^2N(x, y)$$

La ecuación diferencial es homogénea de grado 2 (Sección 13.5). El cambio $y = vx$ la transforma en una ecuación diferencial de variables separables:

$$(x^2 - v^2x^2)\,dx + 2vx^2(v\,dx + x\,dv) = 0$$
$$(x^2 - v^2x^2)\,dx + 2v^2x^2dx + 2vx^3dv = 0$$
$$(x^2 + v^2x^2)\,dx + 2vx^3dv = 0$$
$$x^2(1 + v^2)\,dx + 2vx^3dv = 0$$
$$\frac{1}{x}\,dx + \frac{2v}{1+v^2}\,dv = 0$$
$$\ln|x| + \ln(1 + v^2) = \ln C$$
$$x(1 + v^2) = C$$
$$x^2 + y^2 = Cx$$

**13.3.** Una sustancia radiactiva se desintegra con velocidad proporcional a la cantidad $H$ de sustancia presente, siendo $k$ la constante de proporcionalidad. Expresar $H$ en función del tiempo $t$.

### Resolución

$$\frac{dH}{dt} = -kH \quad \text{(variables separables).}$$

$$\frac{1}{H} dH = -k\,dt \Longrightarrow \ln H = -kt + \ln C \Longrightarrow H = Ce^{-kt}$$

[Ver el Ejemplo 3.13 (Sección 3.11)].

**13.4.** Resolver $(x^2 - y)\,dx - x\,dy = 0$.

### Resolución

Las funciones $M(x, y) = x^2 - y$ y $N(x, y) = -x$ verifican:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -1 \quad \text{y} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -1$$

Por tanto, la ecuación diferencial es exacta (Sección 13.6):

$$\frac{\partial z(x, y)}{\partial x} = x^2 - y \Longrightarrow z(x, y) = \frac{x^3}{3} - xy + h(y)$$

Derivando con respecto a $y$:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -x + h'(y) \Longrightarrow -x + h'(y) = N = -x \Longrightarrow h'(y) = 0 \Longrightarrow h(y) = C$$

La solución general:

$$\frac{x^3}{3} - xy + C = 0$$

**13.5.** Resolver la ecuación diferencial $(x^2 + y^2 + x)\,dx + xy\,dy = 0$.

### Resolución

Sean $M(x, y) = x^2 + y^2 + x$ y $N(x, y) = xy$. Las derivadas parciales son:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2y; \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = y$$

Por otra parte:

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{2y - y}{xy} = \frac{1}{x}$$

es función sólo de $x$. Por tanto:

$$e^{\int \frac{1}{x}\,dx} = e^{\ln x} = x$$

es un factor integrante (ver Sección 13.7). La ecuación diferencial:

$$x(x^2 + y^2 + x)\,dx + x^2 y\,dy = 0$$

es exacta; será la diferencial total de una función $z(x, y)$. Por tanto, integrando $x^3 + xy^2 + x^2$ respecto a $x$:

$$z(x, y) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2y^2}{2} + \frac{x^3}{3} + h(y)$$

Derivando con respecto a la variable $y$ e igualando a $x^2y$:

$$\frac{\partial z(x, y)}{\partial y} = x^2y + h'(y) = x^2y \Longrightarrow h'(y) = 0 \Longrightarrow h(y) = C$$

Entonces, la solución general es:

$$\frac{x^4}{4} + \frac{x^2y^2}{2} + \frac{x^3}{3} + C = 0$$

**13.6.** Hallar las curvas tales que la pendiente de su recta tangente en cada punto $(x, y)$ sea igual al cuadrado de la abscisa $x$ de dicho punto. Hallar la solución particular que pasa por el punto (0, 1).

### Resolución

$$\frac{dy}{dx} = x^2 \quad \text{(variables separables)}$$

Se tiene que:

$$dy = x^2dx \Longrightarrow y = \frac{x^3}{3} + C$$

La solución particular que pasa por (0, 1) es:

$$1 = 0 + C \Longrightarrow C = 1$$

Por tanto:

$$y = \frac{x^3}{3} + 1$$

**13.7.** Resolver $y' + 2xy = 2x$.

### Resolución

Se trata de una ecuación lineal (Sección 13.8). Su solución será:

$$ye^{\int 2xdx} = \int 2xe^{\int 2xdx}dx + C$$

luego:

$$ye^{x^2} = e^{x^2} + C \Longrightarrow y = 1 + Ce^{-x^2}$$

**13.8.** Hallar las curvas tales que la longitud de la normal en cada uno de sus puntos $(x, y)$ sea igual a 2 unidades.

### Resolución

La ecuación de la recta normal en $(x, y)$ (ver Figura 13.2):

$$Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x)$$

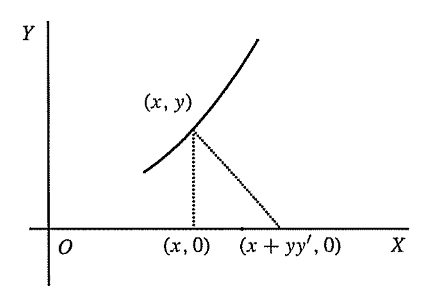



**Figura 13.2**

Para $Y=0$: $X=x+yy'$. El punto de intersección de la normal con el eje de abscisas es $(x+yy', 0)$. La longitud de la normal es igual a la distancia de $(x, y)$ a $(x+yy', 0)$:

$$\sqrt{(x-x-yy')^2+(y-0)^2}=2$$

O bien:

$$(-yy')^2+y^2=4 \Longrightarrow \frac{y}{\sqrt{4-y^2}}\,dy=dx \quad \text{(variables separadas)}$$

cuya solución es $-\sqrt{4-y^2}=x+C$. Elevando al cuadrado:

$$x^2+y^2+2Cx+(C^2-4)=0 \quad \text{[circunferencias de centro } (-C, 0) \text{ y radio 2]}$$

**13.9.** Hallar las curvas tales que la pendiente de la recta tangente en cada punto $(x, y)$ sea igual a la suma $x+y$ de las coordenadas de dicho punto.

### Resolución

$$\frac{dy}{dx}=x+y \Longrightarrow \frac{dy}{dx}-y=x \quad \text{(lineal)}$$

Su solución:

$$ye^{-\int dx}=\int xe^{-\int dx}dx+C$$

Resolviendo por partes la integral del segundo miembro:

$$ye^{-x}=-xe^{-x}-e^{-x}+C \Longrightarrow y=-x-1+Ce^{x}$$

**13.10.** Resolver $xy(2+y^3)dx+dy=0$.

### Resolución

Escribiéndola de la forma:

$$\frac{dy}{dx}+y\cdot 2x=y^4(-x)$$

se aprecia que se trata de una ecuación de Bernouilli (Sección 13.9). Haciendo $y^{-3}=v \Longrightarrow -3y^{-4}dy=dv$, se transforma en una ecuación lineal:

$$\frac{dv}{dx}-v\cdot 6x=3x$$

Su solución:

$$ve^{\int -6x dx} = \int 3xe^{\int -6x dx} dx + C$$

$$ve^{-3x^2} = \int 3xe^{-3x^2} dx + C$$

$$ve^{-3x^2} = -\frac{e^{-3x^2}}{2} + C$$

Finalmente:

$$y^{-3} = -\frac{1}{2} + Ce^{3x^2}$$

**13.11.** Hallar las trayectorias ortogonales de la familia $x^2 + y^2 = C^2$.

### Resolución

La ecuación diferencial de la familia es:

$$2x\,dx + 2y\,dy = 0 \Longrightarrow y' = -\frac{x}{y}$$

Sustituyendo $y'$ por $-\dfrac{1}{y'}$:

$$-\frac{1}{y'} = -\frac{x}{y} \Longrightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

Integrando:

$$\ln|y| = \ln|x| + \ln|C| \Longrightarrow y = Cx$$

Se trata de rectas que pasan por el origen y, por tanto, son perpendiculares a las circunferencias $x^2 + y^2 = C^2$.



**13.12.** Resolver $y'' - y' - 2y = e^{3x}$.

### Resolución

Utilizando el operador $D = \dfrac{d}{dx}$, se puede escribir en la forma:

$$(D^2 - D - 2)y = (D+1)(D-2)y = e^{3x}$$

La solución general de la homogénea será:

$$y_h = C_1e^{-x} + C_2e^{2x}$$

Para hallar una solución particular $y_p$ de la ecuación no homogénea, se utiliza el método de variación de las constantes. Se reemplazan las $C_i$ por las $L_i$:

$$y = L_1e^{-x} + L_2e^{2x}$$

Se deriva y se igualan a cero los sumandos que contienen $L_i'$:

$$Dy = L_1'e^{-x} - L_1e^{-x} + L_2'e^{2x} + 2L_2e^{2x}$$

luego:

$$L_1'e^{-x} + L_2'e^{2x} = 0 \qquad (13.3)$$

Se deriva y se igualan a $P(x) = e^{3x}$ los sumandos que contienen $L_i'$:

$$D^2y = -L_1'e^{-x} + L_1e^{-x} + 2L_2'e^{2x} + 4L_2e^{2x}$$

luego:

$$-L_1'e^{-x} + 2L_2'e^{2x} = e^{3x} \tag{13.4}$$

Se resuelve el sistema formado por las ecuaciones (13.3) y (13.4):

$$\left.\begin{aligned} L_1'e^{-x} + L_2'e^{2x} &= 0 \\ -L_1'e^{-x} + 2L_2'e^{2x} &= e^{3x} \end{aligned}\right\}$$

resultando $L_1' = -e^{4x}/3$ y $L_2' = e^x/3$. De donde $L_1 = -e^{4x}/12$ y $L_2 = e^x/3$. La solución particular $y_p$ será:

$$y = L_1e^{-x} + L_2e^{2x} = -e^{4x}/12 \cdot e^{-x} + e^x/3 \cdot e^{2x} = e^{3x}/4$$

La solución general:

$$y = C_1e^{-x} + C_2e^{2x} + e^{3x}/4$$

**13.13.** Resolver $y'' + y = 2$.

**Resolución**

Utilizando el operador $D = \dfrac{d}{dx}$, se puede escribir en la forma:

$$(D^2 + 1)y = 2$$

Las raíces son $\pm i$. La solución general de la homogénea será:

$$y_h = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x$$

Se utiliza el método de variación de las constantes. Reemplazando las $C_i$ por las $L_i$:

$$y = L_1 \cos x + L_2 \operatorname{sen} x$$

Derivando e igualando a cero los sumandos que contienen $L_i'$:

$$Dy = L_1' \cos x - L_1 \operatorname{sen} x + L_2' \operatorname{sen} x + L_2 \cos x$$

luego es:

$$L_1' \cos x + L_2' \operatorname{sen} x = 0 \tag{13.5}$$

Derivando e igualando a $P(x) = 2$ los sumandos que contienen $L_i'$:

$$D^2y = -L_1' \operatorname{sen} x - L_1 \cos x + L_2' \cos x - L_2 \operatorname{sen} x$$

y, por tanto:

$$-L_1' \operatorname{sen} x + L_2' \cos x = 2 \tag{13.6}$$

Se resuelve el sistema formado por las ecuaciones (13.5) y (13.6):

$$\begin{aligned} L_1' \cos x + L_2' \operatorname{sen} x &= 0 \\ -L_1' \operatorname{sen} x + L_2' \cos x &= 2 \end{aligned}$$

resultando $L_1' = -2 \operatorname{sen} x$ y $L_2' = 2 \cos x$. De donde $L_1 = 2 \cos x$ y $L_2 = 2 \operatorname{sen} x$. La solución particular $y_p$ será:

$$y = 2\cos^2 x + 2\operatorname{sen}^2 x = 2(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x) = 2$$

La solución general:

$$y = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x + 2$$

# PROBLEMAS PROPUESTOS

En los ejercicios siguientes, indicar el orden y el grado de las siguientes ecuaciones diferenciales:

**13.14.** $dx - 2xy\,dy = 0.$

**13.15.** $y'' - xy' + (y')^2 - 6 = 0.$

**13.16.** $y' - 2 = (3 + y')^{-2}.$

Resolver las ecuaciones diferenciales:

**13.17.** $(e^{2x} - 2y)dx - dy = 0.$

**13.18.** $x(1 - y^2)dx + y(1 - x^2)dy = 0.$

**13.19.** $(2 - y) \cdot \cos x\,dx - dy = 0.$

**13.20.** $y(y - x)dx + x^2dy = 0.$

**13.21.** $2xy\,dx + (y + y^2 - x^2)dy = 0.$

**13.22.** $x\,\dfrac{dy}{dx} + y = x^4y^3.$

**13.23.** $x \cdot \operatorname{sen}\dfrac{y}{x} \cdot \dfrac{dy}{dx} = y \cdot \operatorname{sen}\dfrac{y}{x} + x.$

**13.24.** $x\,dy + xe^{-\frac{y}{x}}dx = y\,dx.$

**13.25.** $(x^2 - y^2 - xy)dy + y^2\,dx = 0.$

**13.26.** $(1 - x + y - xy)dx - xy\,dy = 0.$

**13.27.** $(2x + y)dx + (2y + x)dy = 0.$

**13.28.** Hallar las curvas tales que la normal en cada uno de sus puntos $(x, y)$ tenga la misma longitud que el segmento que une el origen con $(x, y)$.

**13.29.** Hallar las curvas tales que el punto medio de la normal trazada en cada punto $(x, y)$ esté sobre la recta $x = 1$.

**13.30.** Hallar las curvas tales que la longitud de la subtangente en cada punto $(x, y)$ sea igual a la suma de las coordenadas del punto.

**13.31.** Hallar las curvas tales que en cada punto $(x, y)$ la pendiente de la recta tangente sea igual al cuadrado de la abscisa del punto. Hallar la curva que pase por el origen.

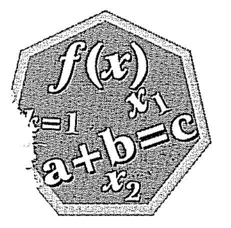
**13.32.** En cada punto $(x, y)$ de una curva, el segmento que la recta tangente intercepta en el eje de ordenadas es igual a 2x. Hallar dicha curva.

**13.33.** En cada punto $(x, y)$ de una curva, la subtangente es igual al doble de la abscisa del punto. Hallar la curva.

**13.34.** Hallar la curva cuya normal en cada punto $(x, y)$ sea igual a 5.

**13.35.** Resolver la ecuación diferencial $y'' - 2y' + y = x^2 - 1.$

**13.36.** Resolver la ecuación diferencial $y'' + y = \operatorname{cosec} x.$



CAPÍTULO 14

# MÉTODOS NUMÉRICOS



En muchas ocasiones, se presentan problemas cuya formulación matemática no posee una solución analítica exacta, por ejemplo, cuando se quiere calcular una integral definida y no es posible obtener la primitiva del integrando, o cuando es necesario resolver una ecuación cuyas raíces no son exactas. Se verá algunos métodos sencillos que permitirán aproximar la solución del problema.

## 14.1. ERROR ABSOLUTO Y RELATIVO

Puesto que en matemáticas, por distintos motivos, se ha de operar con números que no son exactos, es importante conocer las fuentes de estos errores, saber analizarlos y evitarlos, o corregirlos en la medida de lo posible.

En los problemas se requieren soluciones numéricas, las cuales, al contrario que las soluciones analíticas, no están exentas de errores, que pueden surgir aunque se trabaje con calculadora u ordenador que haya sido programado tras diseñar el método numérico correspondiente.

Dado un número $x$ y una aproximación $x'$, se llama *error absoluto de* $x$, al valor absoluto:

$$e_a = |x - x'|$$

La aproximación $x'$ será por defecto o por exceso, según que la diferencia $x - x'$ sea positiva o negativa.

El *error relativo de* $x$ es el cociente:

$$e_r = \frac{|x - x'|}{|x|}$$

El *error porcentual de* $x$ o *porcentaje de error* es:

$$100\,\frac{|x - x'|}{|x|}\,\%$$

## 14.2. ARITMÉTICAS DE PUNTO FIJO Y PUNTO FLOTANTE

Se llama *cifras significativas* de un número a todas las cifras de dicho número a partir de la primera cifra de la izquierda distinta de cero.

**EJEMPLO 14.1** Las cifras significativas de los siguientes números son las que están subrayadas:

$$\underline{18{,}021954},\ \underline{62{,}35780},\ 0{,}0\underline{3205},\ 0{,}0\underline{23700},\ \underline{2{,}0035},\ \underline{160{,}984},\ \underline{2803{,}87}$$

Para realizar cálculos numéricos es necesario redondear los números, eliminando los dígitos superfluos; el último dígito se redondea de acuerdo a las siguientes reglas:

1. El último dígito permanece invariable si los dígitos siguientes son menores que 5000...
2. Se añade una unidad al último dígito si los dígitos siguientes son mayores que 5000...
3. El último dígito permanece invariable o se le añade una unidad, según sea par o impar, si los dígitos siguientes son exactamente 5000...

**EJEMPLO 14.2** Redondear con dos cifras decimales los siguientes números: 23,457, 421,2348, 13,265 y 43,735.

$$23{,}457 \approx 23{,}46$$
$$421{,}2348 \approx 421{,}23$$
$$13{,}265 \approx 13{,}26$$
$$43{,}735 \approx 43{,}74$$

A la hora de realizar los cálculos aritméticos, puede mantenerse un número fijo de cifras decimales en cada número; es la llamada *aritmética de punto fijo o de coma fija*, debido a que el punto (o la coma) decimal se conserva en una posición fija. Por el contrario, la aritmética en la que se mantiene un número fijo de cifras significativas en cada número (tanto antes como después de cada operación aritmética), se llama *aritmética de punto o coma flotante*, debido a que permite al punto flotar (moverse) de una posición a otra; para ello, el punto decimal se lleva, en cada número, a la izquierda del primer dígito no nulo, y se multiplica por la correspondiente potencia de diez. Por ejemplo:

$$6543{,}21 = 0{,}654321 \cdot 10^4$$
$$0{,}014 = 0{,}14 \cdot 10^{-1}$$

En el siguiente ejemplo se aprecia que la aritmética de punto flotante es más eficiente que la de punto fijo. Se realizará el producto de los dos números anteriores, en primer lugar, con aritmética de punto fijo con dos decimales y, a continuación, con aritmética de punto flotante con dos cifras significativas.

**EJEMPLO 14.3** Sean $a = 6543{,}21$ y $b = 0{,}014$. El producto $a \cdot b$ utilizando aritmética de punto fijo con dos decimales es:

$$a = 6543{,}21$$
$$b = 0{,}014 \approx 0{,}01$$
$$a \cdot b = 6543{,}21 \cdot 0{,}01 = 65{,}4321 \approx 65{,}43$$

A continuación, se halla $a \cdot b$ con aritmética de punto flotante con dos cifras significativas:

$$a = 6543{,}21 = 0{,}654321 \cdot 10^4 = 0{,}65 \cdot 10^4$$
$$b = 0{,}014 = 0{,}14 \cdot 10^{-1}$$
$$a \cdot b = 0{,}65 \cdot 10^4 \cdot 0{,}14 \cdot 10^{-1} = 0{,}091 \cdot 10^3 = 0{,}91 \cdot 10^2 \approx 0{,}91 \cdot 10^2 = 91$$

El valor exacto de $a \cdot b$:

$$a \cdot b = 6543{,}21 \cdot 0{,}014 = 91{,}60494$$

El estudio de la propagación de los errores de redondeo, es decir, los resultados obtenidos con las operaciones de suma, resta, multiplicación, división, potenciación y radicación, cuando se realizan usando datos con errores, queda fuera del alcance de este texto.

## 14.3. INTERPOLACIÓN

En ocasiones, se dispone de una tabla de valores de una función y se desea calcular el valor de dicha función para un valor $\overline{x}$ que no viene dado en la tabla. Éste es el problema de la *interpolación*.

Si se dispone de $n+1$ pares de valores:

| $x$ | $x_0$ | $x_1$ | $x_2$ | $\dots$ | $x_n$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $y_0$ | $y_1$ | $y_2$ | $\dots$ | $y_n$ |

se pueden representar dichos pares de valores y unirlos mediante una curva, determinando gráficamente el valor de $\overline{y}$:

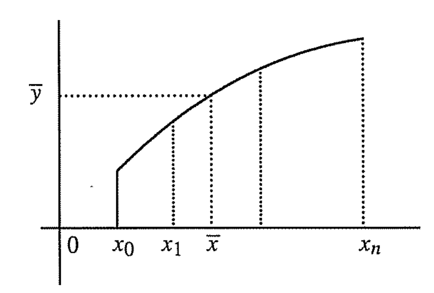



**Figura 14.1**

Éste es un método muy simple y su exactitud depende de la curva que se trace y de lo próximos que estén entre sí los valores de la tabla.

### FÓRMULA DE LAGRANGE

Los polinomios $P_i(x)$ de la forma:

$$P_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}$$

verifican $P_i(x_i) = 1$ y, además:

$$P_i(x_0) = P_i(x_1) = P_i(x_2) = \cdots = P_i(x_{i-1}) = P_i(x_{i+1}) = \cdots = P_i(x_n) = 0$$

Entonces, la función polinómica:

$$P(x) = y_0P_0(x) + y_1P_1(x) + \cdots + y_nP_n(x)$$

resuelve el problema, ya que:

$$P(x_0) = y_0, \ P(x_1) = y_1, \ \dots, P(x_n) = y_n$$

La función $P(x)$ recibe el nombre de *polinomio interpolador de Lagrange*.

(Ver Problema resuelto 14.5.)

### FÓRMULA DE NEWTON

Se utiliza cuando los valores de $x$ están en progresión aritmética. Si se dispone de $n+1$ pares de valores:

| $x$ | $x_0$ | $x_1$ | $x_2$ | $\dots$ | $x_n$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $y_0$ | $y_1$ | $y_2$ | $\dots$ | $y_n$ |

tales que los valores de $x$ están en progresión aritmética:

$$x_1 = x_0 + h,\ x_2 = x_1 + h = x_0 + 2h,\ \ldots,\ x_n = x_0 + nh$$

Se definen las *diferencias primeras* en la forma:

$$\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$$

Por ejemplo:

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0$$
$$\Delta y_1 = y_2 - y_1$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Del mismo modo, se definen las *diferencias segundas*:

$$\Delta^2 y_k = \Delta(\Delta y_k) = \Delta(y_{k+1} - y_k) = \Delta y_{k+1} - \Delta y_k$$

Por ejemplo:

$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0$$
$$\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Por último, se utiliza el polinomio:

$$P(x) = y_0 + \frac{(x - x_0)}{1!\,h}\Delta y_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{2!\,h^2}\Delta^2 y_0 + \cdots + \frac{(x - x_0)\ldots(x - x_n)}{n!\,h^n}\Delta^n y_0$$

llamado *polinomio interpolador de Newton*.

(Ver Problema resuelto 14.6.)

Una ventaja del método de Newton es que si una vez obtenido el polinomio interpolador se dispone de un dato más, basta con añadir dicho dato a la tabla y un sumando al polinomio interpolador, sin necesidad de rehacer todos los cálculos.



## 14.4. RESOLUCIÓN DE ECUACIONES

En muchas ocasiones es necesario resolver ecuaciones de la forma $f(x) = 0$ para las que no existe una fórmula que permita hallar sus raíces, como sí ocurre en el caso de $ax^2 + bx + c = 0$, o en el de un polinomio con raíces enteras (algoritmo de Ruffini). Es necesario entonces utilizar métodos que permitan aproximar las raíces mediante sucesiones de valores $x_0, x_1, x_2, \ldots$, que converjan a dichas raíces.

### MÉTODO DE BIPARTICIÓN

Según el teorema de Bolzano (Capítulo 5), si $f(x)$ es continua en el intervalo $[a, b]$, y toma valores de signo opuesto en los puntos $a$ y $b$, existe al menos un punto $c \in (a, b)$, tal que $f(c) = 0$. Además, el teorema de Rolle (Capítulo 6) garantiza que si $f(x)$ es derivable en $(a, b)$ y $f'(x)$ no se anula en dicho intervalo, dicha raíz $c$ es única (ver Problema resuelto 5.32.).

### MÉTODO DE NEWTON O DE LA TANGENTE

Este método tiene por objeto aproximar la raíz de una función mediante su recta tangente. Sea la función $f(x)$ dos veces derivable en un conjunto que contenga al intervalo $(x_0, b)$ [además, se supone que $f(x)$ tiene una sola raíz en el intervalo $(x_0, b)$], la recta tangente a $f(x)$ en el punto $(x_0, f(x_0))$ es:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

El punto de corte $x_1$ de dicha tangente con el eje de abscisas es (ver Figura 14.2):

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

El valor $x_1$ es una primera aproximación del valor de la raíz. Se toma ahora el punto $(x_1, f(x_1))$ y se repite el proceso. La ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en el punto $(x_1, f(x_1))$ es:

$$y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1)$$

El punto de corte $x_2$ de dicha tangente con el eje de abscisas es:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

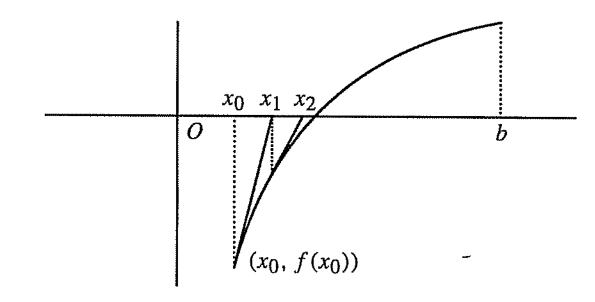



**Figura 14.2**

En general:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

La condición suficiente para que la sucesión anterior converja a la solución es que:

$$\left| \frac{f(x) \cdot f''(x)}{[f'(x)]^2} \right| < 1$$

● NOTA *Antes de aplicar el método anterior en un intervalo $(a, b)$, conviene elegir como punto de inicio aquél en que los signos de $f(x)$ y $f''(x)$ sean iguales (ver Figura 14.3):*

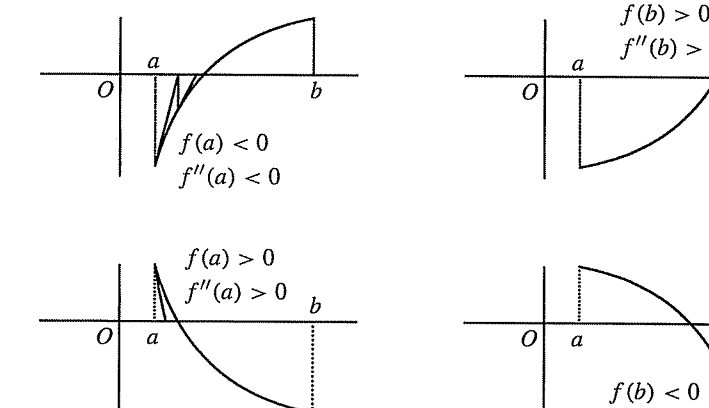



**Figura 14.3**

(Ver Problema resuelto 14.7.)

## 14.5. RESOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES

Los métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales se dividen en dos grandes grupos: directos e iterativos. Métodos *directos* son aquéllos que están basados en su mayoría en la eliminación gaussiana o método de Gauss, y que permiten resolver el sistema de ecuaciones en un número finito de pasos. Reciben este nombre para diferenciarse de los llamados *iterativos*, en los que a partir de un vector solución inicial $x^{(0)}$ se genera una sucesión de vectores que debe converger a la solución $x$ del sistema.

Se desea resolver el sistema de $n$ ecuaciones lineales y $n$ incógnitas:

$$\begin{aligned} E_1 : &\quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ E_2 : &\quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ E_n : &\quad a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{aligned} \tag{14.1}$$

que se puede escribir matricialmente:

$$Ax = b$$

siendo:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}; \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}; \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

donde se supone que el determinante de la matriz $A$ es no nulo, $\det(A) \neq 0$.

### MÉTODO DE GAUSS

El método de Gauss, o eliminación gaussiana, consiste en transformar el sistema dado:

$$Ax = b$$

en otro equivalente:

$$Ux = c$$

en el que la matriz U es triangular superior. Esto es, el sistema anterior (14.1) se transforma en un sistema triangular equivalente de la forma:

$$\begin{aligned} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + \cdots + a'_{1n}x_n &= b'_1 \\ a'_{22}x_2 + \cdots + a'_{2n}x_n &= b'_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ a'_{nn}x_n &= b'_n \end{aligned} \tag{14.2}$$

donde los elementos $a'_{ii}$, llamados *pivotes*, son no nulos y en el que cada ecuación $E_j$ se sustituye por la ecuación equivalente:

$$E_j - \frac{a'_{ji}}{a'_{ii}} E_i; \qquad j = i+1, \ldots, n$$

donde los $\dfrac{a'_{ij}}{a'_{ii}}$ son los llamados *multiplicadores*.

El valor de $x_n$ se calcula despejando en la última ecuación. Sustituyendo en la anterior ecuación, se halla $x_{n-1}$, y así sucesivamente. Ésta es la llamada *sustitución regresiva* o *hacia atrás*. En general:

$$x_i = \frac{b'_i - \sum_{j=i+1}^{n} a'_{ij}x_j}{a'_{ii}}$$

con $i = n-1, \ldots, 1$.

(Ver Problema resuelto 14.9.)

Una variante de este procedimiento es el llamado método de Gauss-Jordan, que consiste en eliminar no sólo los elementos subdiagonales de las ecuaciones $E_j$, $E_{j+1}$, ..., $E_n$, como se hizo en el método de Gauss, sino también de $E_1$, $E_2$, ..., $E_{j-1}$, reduciendo el sistema original a un sistema diagonal. Es decir, se elimina en cada columna los elementos que están situados por debajo y por encima de la diagonal principal, hallando los multiplicadores correspondientes. Este procedimiento evita la necesidad de la sustitución hacia atrás en la eliminación gaussiana, sin embargo, el número de operaciones es algo mayor que en el método de Gauss.

Si en el transcurso del anterior algoritmo resultara algún pivote nulo, no sería posible continuar con su proceso. Para evitar esto, se puede utilizar como pivote en cada columna otra entrada no nula en lugar de la entrada diagonal correspondiente. Es preciso realizar un intercambio de las filas de la matriz que contienen dicha entrada diagonal nula y el pivote seleccionado. Este intercambio siempre es posible si la matriz es invertible. En la práctica, hay otra razón que aconseja realizar un intercambio de filas: cuando se toma como pivote un número muy pequeño, se produce inestabilidad en la eliminación gaussiana, produciéndose un sustancial error de redondeo.

En definitiva, ya sea por el motivo teórico de una entrada diagonal nula o por el práctico de una entrada casi nula, la eliminación gaussiana con intercambios consiste en elegir como pivote la entrada de la misma columna que está bajo la diagonal principal y que tiene el máximo valor absoluto, i.e., se determina $p$ tal que:

$$\left|a_{pk}^{(k)}\right| = \text{máx}\left|a_{ik}^{(k)}\right|, \qquad k \leq i \leq n$$

A esta técnica se le llama *pivoteo parcial* o *pivoteo máximo de columna.*

(Ver Problema resuelto 14.9.)

Otro modo de proceder es el llamado *pivoteo total*, que consiste en realizar los cambios necesarios entre filas y/o columnas para situar en la posición del pivote el mayor elemento en valor absoluto de la submatriz restante $A^{(r)}$ en cada paso $r$.

En referencia al coste computacional de la eliminación de Gauss con pivoteo, hay que decir que va a ser el mismo que en el método de Gauss simple, si bien el tiempo de cálculo será algo mayor en la práctica, debido a las operaciones necesarias para el intercambio de filas o columnas.

## INVERSA DE UNA MATRIZ. MATRICES ESPECIALES

Mediante el algoritmo de Gauss-Jordan es posible calcular la inversa de una matriz no singular $A$. Se procede del siguiente modo: en la matriz ampliada $[A|I]$, se aplica el algoritmo de Gauss-Jordan hasta llegar a la matriz $[I|A^{-1}]$:

$$[A|I] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

Aplicando el algoritmo de Gauss-Jordan resulta:

$$[I|A^{-1}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & a'_{11} & a'_{12} & \ldots & a'_{1n} \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & a'_{21} & a'_{22} & \ldots & a'_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & a'_{n1} & a'_{n2} & \ldots & a'_{nn} \end{pmatrix}$$

(Ver Problema resuelto 14.11.)

● DEFINICIÓN 14.1 *Una matriz simétrica $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ es definida positiva si y sólo si:*

$$v^t A v = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} v_i a_{ij} v_j > 0,\ \forall v \in \mathbb{R}^n - \{0\}$$

Evidentemente, en una matriz $A$ definida positiva, las entradas diagonales son siempre positivas, puesto que $e_i^t A e_i = a_{ii}$, donde $e_i$ es el $i$-ésimo vector canónico, cuyas componentes son todas cero a excepción de la posición $i$-ésima, que es igual a 1.

■ TEOREMA 14.1 *Cada una de las siguientes afirmaciones es condición necesaria y suficiente para que la matriz simétrica A sea definida positiva:*

*a)* $v^t A v > 0$.
*b) Todos los autovalores de A son positivos.*
*c) Todos los determinantes principales:*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} > 0,\quad k = 1,\ldots,n$$

*son positivos.*
*d) Todos los pivotes (sin intercambio de filas) son positivos.*

■ TEOREMA 14.2 *Si A es definida positiva, se puede factorizar en la forma $A = LL^t$, siendo L una matriz triangular inferior.*

● DEFINICIÓN 14.2 *Una matriz cuadrada $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ posee* diagonal estrictamente dominante *si, y sólo si:*

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|,\ \ j \neq i,\ \ i = 1,2,\ldots,n$$

**EJEMPLO 14.4** La matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ es definida positiva, ya que:

$$|4| > 0;\qquad \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 16 > 0;\qquad \begin{vmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 18 > 0$$

Sin embargo, no posee diagonal estrictamente dominante.

■ TEOREMA 14.3 *Si la matriz A es definida positiva o posee diagonal estrictamente dominante, A es invertible. Además, se puede aplicar el método de Gauss al sistema $Ax = b$ y obtener su solución única sin intercambio de filas o columnas, y dicha solución es estable respecto a posibles errores de redondeo.*

## FACTORIZACIÓN LU

Si al sistema $Ax = b$ se le puede aplicar el método de Gauss sin intercambio de ecuaciones ni incógnitas, entonces es posible descomponer la matriz $A$ en la forma $A = LU$, siendo $L$ una matriz triangular inferior y $U$ una matriz triangular superior:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ l_{n1} & l_{n2} & \ldots & l_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \ldots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \ldots & u_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

Si se impone la condición de que los elementos diagonales de $L$ sean iguales a la unidad, la factorización anterior se conoce con el nombre de *factorización de Doolittle*:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

La factorización de Doolittle $LU$ tiene las siguientes características:

a) La matriz $L$ es triangular inferior y $U$ es triangular superior.
b) Las entradas diagonales de $L$ son iguales a 1.
c) Las entradas subdiagonales de $L$ son respectivamente iguales a los multiplicadores de la eliminación gaussiana.
d) La matriz $U$ es la matriz del sistema escalonado, al que se llega después de aplicar la eliminación gaussiana, y sus entradas diagonales son los pivotes.

El coste computacional del método de Doolittle es análogo al del método de Gauss. El cálculo de $L$ no requiere operaciones adicionales, ya que se obtiene sin más que conservar los valores de los multiplicadores de la eliminación.

● NOTA

1) *No toda matriz A admite la factorización de Doolittle. Por ejemplo, considerando la factorización de Doolittle para matrices* $2 \times 2$*:*

$$LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & c \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & c \\ ab & ac+d \end{pmatrix}$$

*La matriz:*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = LU$$

*propicia un sistema incompatible:*

$$\left.\begin{aligned} b &= 0 \\ c &= 1 \\ ab &= 1 \\ ac+d &= 0 \end{aligned}\right\}$$

*aunque dicha matriz A sea invertible, ya que* $|A| \neq 0$.

2) *Una matriz no invertible sí puede aceptar la factorización de Doolittle. Por ejemplo:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

*De las dos notas anteriores se deduce que la condición de invertible no es condición necesaria ni suficiente para la factorización de Doolittle.*

3) *Se puede demostrar que la condición suficiente para que una matriz cuadrada A sea factorizable por el método de Doolittle es que:*

$$\det(A_k) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \neq 0, \qquad \text{para } k = 1, \dots, n$$

4) *Se puede demostrar que para toda matriz cuadrada $A$ existe una matriz de permutación*[1] *$P$, tal que $PA$ sí admite la factorización de Doolittle $PA = LU$.*

*La matriz de la nota 1):*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

*no admite la factorización de Doolittle, sin embargo:*

$$PA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

*sí la admite.*

5) *Si la matriz $A$ es invertible y factorizable por el método de Doolittle, la factorización es única. En efecto, supongamos que existen dos factorizaciones distintas: $A = L_1U_1 = L_2U_2$. Por ser $A$ invertible, también lo son $L_1$, $U_1$, $L_2$ y $U_2$. Además, $L_2^{-1}L_1 = U_2U_1^{-1}$, y como $L_2^{-1}L_1$ es subtriangular con diagonal unitaria y $U_2U_1^{-1}$ es triangular superior, debe verificarse que $L_2^{-1}L_1 = U_2U_1^{-1} = I$. Por tanto, $L_1 = L_2$ y $U_1 = U_2$.*

6) *La factorización de Doolittle proporciona un método poco costoso para calcular el determinante de una matriz $A$, puesto que si $A = LU$, entonces* $\det A = (\det L)\cdot(\det U) = \det U = u_{11}u_{22}\dots u_{nn}$, *ya que el determinante de una matriz triangular es igual al producto de sus elementos diagonales. Por tanto, el determinante de $A$ es igual al producto de los pivotes de la eliminación gaussiana.*

## FACTORIZACIONES DE CROUT Y CHOLESKY

Volviendo al principio, si se requiere que $u_{11} = u_{22} = u_{33} = 1$, se obtiene la factorización conocida con el nombre de *factorización de Crout*, similar a la de Doolittle, salvo que ahora son iguales a 1 las entradas diagonales de $U$ en lugar de las de la matriz $L$.

Volviendo nuevamente al principio, si ahora se imponen las condiciones $l_{11} = u_{11}$, $l_{22} = u_{22}$ y $l_{33} = u_{33}$, se tiene la llamada *factorización de Cholesky*.

Esta factorización no siempre es posible. Para ello es preciso que la matriz $A$ sea definida positiva, para garantizar la existencia de las raices cuadradas que aparecen en los cálculos.

Otra consideración importante acerca de la factorización de Cholesky la constituye el hecho de que si la matriz $A$ es simétrica, entonces la matriz $U = L^t$, y se factoriza $A$ en la forma $A = LL^t$ .

Entonces, si $A$ es simétrica y definida positiva, $Ax = b \Leftrightarrow LL^tx = b$, que se resuelve en dos etapas:

1. Resolución del sistema subtriangular $Ly = b$.
2. Hallado el vector $y$, resolución del sistema triangular superior $L^tx = y$.

(Ver Problema resuelto 14.13.)

● NOTA

7) *Evidentemente, la matriz $L$ no es la misma matriz $L$ del método de Doolittle.*

8) *La factorización $LL^t$ no es única. Combinando los signos de las raíces se obtienen distintas matrices.*

*Por ejemplo, sea la matriz:*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

---

[1] Una matriz de permutación es aquélla que tiene una entrada igual a 1 en cada fila y en cada columna, siendo nulas las demás entradas, es decir, es aquélla que se obtiene a partir de la matriz unidad intercambiando filas y columnas entre sí. Por ejemplo:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

*se puede tomar* $l_{11} = \sqrt{4} = \pm 2$, *y obtener* $l_{21} = -1$ *y* $l_{22} = \pm 2$, *resultando:*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

9) *Si la matriz $A$ no es definida positiva, las matrices $L$ y $U$ de la factorización de Cholesky son complejas.*

10) *Si la matriz es definida positiva y, por tanto, es aplicable el algoritmo de Cholesky, los cálculos son estables respecto al crecimiento de los errores de redondeo (ver Teorema 14.3).*

## MÉTODOS ITERATIVOS

En este tipo de métodos, para resolver el sistema $Ax = b$ se parte de una solución inicial $x^{(0)}$ y se genera una sucesión $x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots$, que converge a la solución $x$ del sistema.

**Método de Jacobi.**

En este método se aplica la fórmula:

$$x_i^{(r+1)} = \frac{b_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij}\, x_j^{(r)}}{a_{ii}}, \qquad r = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

llamada *fórmula de Jacobi.*

**Método de Gauss-Seidel.**

La diferencia entre este método y el anterior está en que, en este caso, los valores ya calculados de las incógnitas se utilizan en las ecuaciones posteriores:

$$x_i^{(r+1)} = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(r+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(r)}}{a_{ii}}, \qquad r = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

fórmula llamada *de Gauss-Seidel.*

La condición suficiente para que los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel converjan a la solución es que la matriz $A$ del sistema tenga diagonal estrictamente dominante:

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|, \qquad \text{para } i = 1, 2, \ldots, n$$

o de otro modo:

$$\text{máx}\left[\frac{1}{|a_{ii}|} \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|\right] < 1, \qquad \text{para } i = 1, 2, \ldots, n$$

Por otra parte, si no se dispone de una solución inicial $x^{(0)}$, se aconseja utilizar:

$$x_i^{(0)} = \frac{b_i}{a_{ii}}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

## 14.6. INTEGRACIÓN NUMÉRICA

Es necesaria cuando la integración ordinaria es difícil, la primitiva no es expresable mediante funciones elementales o la función del integrando viene dada por una tabla de valores.

### FÓRMULA DEL VALOR MEDIO

Se desea calcular la integral:

$$\int_a^b f(x)dx$$

siendo $f(x)$ continua en el intervalo $(a, b)$.

Para ello, se divide el intervalo $(a, b)$ en $n$ partes iguales:

$$h = \frac{b-a}{n}$$

y la integral puede aproximarse mediante la suma de las áreas de $n$ franjas verticales de ancho igual a $h$ (ver Figura 14.4):

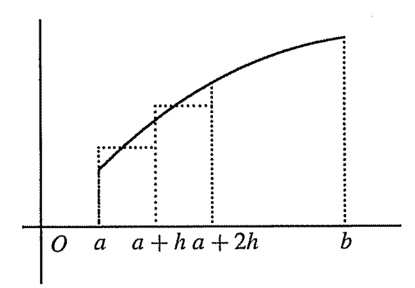



**Figura 14.4**

Para el área de la primera franja se toma:

$$\frac{f(a) + f(a+h)}{2} \cdot h$$

siendo $\dfrac{f(a+h) + f(a)}{2}$ la media aritmética de $f(a)$ y $f(a+h)$.

El área de la segunda franja es:

$$\frac{f(a+h) + f(a+2h)}{2} \cdot h$$

En total:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}[f(a) + 2f(a+h) + 2f(a+2h) + \cdots + 2f(a+(n-1)h) + f(b)]$$

La aproximación es mejor cuanto mayor sea el número de divisiones o intervalos $n$.

### FÓRMULA DE SIMPSON

Si se divide el intervalo $(a, b)$ en dos franjas de ancho $\dfrac{b-a}{2} = h$ y se sustituye el arco $P_0P_1P_2$ de $f(x)$ por una parábola $y = Ax^2 + Bx + C$, que pasa por esos tres puntos, resulta la fórmula:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}[f(a) + 4f(a+h) + f(b)]$$

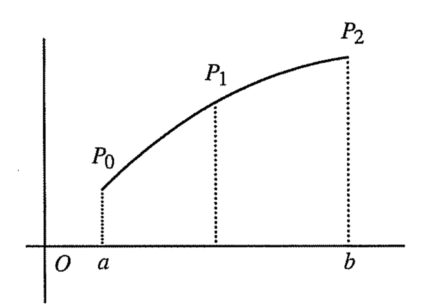



**Figura 14.5**

Si se divide el intervalo $(a, b)$ en un número par $n$ de subintervalos, resultando los puntos $P_0$, $P_1$, $P_2, \ldots, P_n$, y al arco $P_0P_1P_2$ se le aplica la fórmula anterior, a continuación al arco $P_2P_3P_4$, y así sucesivamente, hasta el último arco $P_{n-2}P_{n-1}P_n$:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\big[f(a) + 4f(a+h) + f(a+2h) + f(a+2h) + 4f(a+3h) + f(a+4h) + f(a+4h) + 4f(a+5h) + f(a+6h) + \cdots\big]$$
$$= \frac{h}{3}\big[f(a) + 4f(a+h) + 2f(a+2h) + 4f(a+3h) + 2f(a+4h) + 4f(a+5h) + 2f(a+6h) + \cdots + 4f(a+(n-1)h) + f(b)\big]$$

que es la llamada *fórmula de Simpson compuesta*.

## DESARROLLOS EN SERIE

Si el integrando admite un desarrollo en serie y los límites de integración caen dentro del intervalo de convergencia, se puede aproximar la integral mediante un polinomio (Capítulo 7).

## 14.7. RESOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA E. D. $y' = f(x, y)$

Se desea resolver la ecuación diferencial $y' = f(x, y)$, que satisface la condición inicial $y(x_0) = y_0$. Se supone que la ecuación diferencial posee solución única $y(x)$.

El *método de Euler* consiste en aproximar el valor de $y(x)$ mediante una sucesión $y_1, y_2, \ldots, y_n$, de valores aproximados de $y(x)$ en los puntos $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Para ello, se eligen los puntos $x_k = x_0 + kh$, $k = 0, 1, \ldots, n$, donde la magnitud $h > 0$ es llamada *paso* (ver Figura 14.6).

Puesto que la derivada $y'$ es igual al límite del cociente:

$$\frac{y(x_0 + h) - y(x_0)}{h}$$

cuando $h \to 0$, al sustituir $y'$ por la fracción anterior, en lugar de la ecuación diferencial se obtiene la ecuación en diferencias:

$$\frac{y_1 - y_0}{h} = f(x_0, y_0) \Longrightarrow y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$$

Repitiendo el proceso:

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

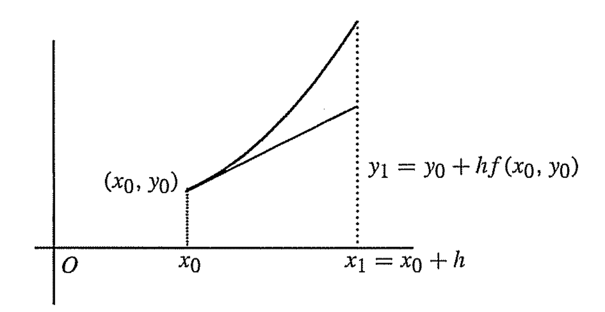



**Figura 14.6**

La idea consiste en aproximar la curva por su tangente. Cada tramo de la curva integral $y = y(x)$ que pasa por $(x_0, y_0)$ se sustituye por un segmento, resultando así una línea quebrada con vértices en los puntos $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$.

# PROBLEMAS RESUELTOS

**14.1.** Hallar el número de cifras significativas de los números siguientes:

a) 81,1003.
b) -15,4.
c) -0,01001.
d) 0,231.
e) 830,000.

**Resolución**

a) 6; b) 3; c) 4; d) 3; e) 6.

**14.2.** Redondear con 3 cifras decimales los números siguientes:

a) 12,3572.
b) 0,0025.
c) 2,6875.
d) 32,7650.
e) 5,4686.

**Resolución**

a) 12,357; b) 0,002; c) 2,688; d) 32,765; e) 5,469.

**14.3.** Escribir en formato de punto flotante los números:

a) 13,214.
b) -12,03.
c) 0,004.
d) 23000.
e) −0,00071.

**Resolución**

a) $0{,}13214 \times 10^2$; b) $-0{,}1203 \times 10^2$; c) $0{,}4 \times 10^{-2}$; d) $0{,}23 \times 10^5$; e) $-0{,}71 \times 10^{-3}$.

**14.4.** El número exacto $a = 2{,}138$ se redondea a dos cifras decimales. Hallar el valor absoluto y relativo cometidos.

### Resolución

El número redondeado es $a' = 2{,}14$. El error absoluto será:

$$e_a = |a - a'| = |2{,}138 - 2{,}14| = |-0{,}002| = 0{,}002$$

El error relativo:

$$e_r = \frac{|a - a'|}{|a|} = \frac{0{,}002}{2{,}138} \approx 0{,}009$$

**14.5.** Dada la tabla de valores de una función $y = f(x)$:

| $x$ | $-1$ | $0$ | $2$ |
|---|---|---|---|
| $y$ | $2$ | $1$ | $3$ |

Escribir el polinomio interpolador de Lagrange y calcular $f(1)$.

### Resolución

El polinomio interpolador de Lagrange:

$$P(x) = y_0\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + y_1\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + y_2\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

$$P(x) = 2\,\frac{(x-0)(x-2)}{(-1-0)(-1-2)} + 1\,\frac{(x+1)(x-2)}{(0+1)(0-2)} + 3\,\frac{(x+1)(x-0)}{(2+1)(2-0)}$$

$$= \frac{2}{3}\,x^2 - \frac{1}{3}x + 1$$

$$P(1) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$$

**14.6.** Dada la tabla de valores de la función $f(x)$:

| $x$ | $1$ | $2$ | $3$ | $4$ |
|---|---|---|---|---|
| $y$ | $3$ | $1$ | $0$ | $2$ |

Escribir el polinomio interpolador de Newton y calcular $f(3/2)$.

### Resolución

Los cálculos se disponen en forma de tabla:

| $x$ | $1$ | $2$ | $3$ | $4$ |
|---|---|---|---|---|
| $y$ | $3$ | $1$ | $0$ | $2$ |
| $\Delta y$ | $-2$ | $-1$ | $2$ | |
| $\Delta^2 y$ | $1$ | $3$ | | |
| $\Delta^3 y$ | $2$ | | | |

El polinomio interpolador:

$$P(x) = 3 + \frac{(x-1)}{1!\,1}(-2) + \frac{(x-1)(x-2)}{2!\,1^2}\,1 + \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{3!\,1^3}\,2$$

$$= \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}\,x^2 + \frac{1}{6}\,x + 4$$

$$P(3/2) = 2$$

**14.7.** Aproximar la raíz que la ecuación $x^3 - x + 1 = 0$ posee en el intervalo $(-2, -1)$, aplicando el método de Newton.

### Resolución

Se elige el extremo más conveniente:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - x + 1; \qquad f(-2) = -5 < 0 \\ f'(x) &= 3x^2 - 1 \\ f''(x) &= 6x; \qquad f''(-2) = -12 < 0 \end{aligned}$$

Se toma $x_0 = -2$, ya que $f(-2)$ y $f''(-2)$ son del mismo signo:

$$x_1 = -2 - \frac{f(-2)}{f'(-2)} = -2 - \frac{-5}{11} = \frac{-17}{11} = -1.\overline{54}$$

$$x_2 = -\frac{17}{11} - \frac{f(-\frac{17}{11})}{f'(-\frac{17}{11})} = -1{,}36$$

Y así sucesivamente. La sucesión $x_0, x_1, x_2, \ldots$, converge a la solución.

**14.8.** Verificar que la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Es definida positiva. b) Sus autovalores son positivos. c) Los determinantes principales son positivos.

### Resolución

a) Es definida positiva ya que:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= 2x^2 - 2xy + 4y^2 + 4yz + 2z^2 \\ &= (x-y)^2 + 2(y+z)^2 + x^2 + y^2 > 0 \end{aligned}$$

los sumandos son positivos.

b) Los autovalores son positivos:

$$|A - \lambda I| = \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 4-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)(\lambda^2 - 6\lambda + 3) = 0$$

Los valores característicos son $\lambda_1 = 2 > 0$, $\lambda_2 = 3 + \sqrt{6} > 0$ y $\lambda_3 = 3 - \sqrt{6} > 0$.

c) Los determinantes principales son positivos:

$$|2| = 2 > 0; \qquad \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 7 > 0; \qquad \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 6 > 0$$

**14.9.** Aplicando el método de Gauss, resolver el sistema:

$$\left.\begin{aligned} 2x+y+z&=1 \\ 4x+y&=-2 \\ -2x+2y+z&=7 \end{aligned}\right\}$$

## Resolución

El algoritmo consta de las siguientes etapas o pasos:

1) Se resta de la segunda ecuación, la primera multiplicada por 2. A este *multiplicador* se le designa $l_{21}=2$ y ha sido obtenido en la forma $\frac{a_{21}}{a_{11}}=\frac{4}{2}=2$. De este modo, se obtiene el sistema equivalente resultante:

$$\left.\begin{aligned} 2x+y+z&=1 \\ -y-2z&=-4 \\ -2x+2y+z&=7 \end{aligned}\right\}$$

2) Se resta de la tercera ecuación, la primera multiplicada por $-1$. El multiplicador $l_{31}=\frac{a_{31}}{a_{11}}=\frac{-2}{2}=-1$. Se obtiene el sistema equivalente:

$$\left.\begin{aligned} 2x+y+z&=1 \\ -y-2z&=-4 \\ 3y+2z&=8 \end{aligned}\right\}$$

3) Se resta de la tercera ecuación, la segunda multiplicada por $-3$, siendo $l_{32}=\frac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}=\frac{3}{-1}=-3$, y resultando el sistema triangular equivalente[2]:

$$\left.\begin{aligned} 2x+y+z&=1 \\ -y-2z&=-4 \\ -4z&=-4 \end{aligned}\right\}$$

Los números $l_{21}=2, l_{31}=-1$ y $l_{32}=-3$ son los llamados multiplicadores de la eliminación gaussiana. En general, $l_{ij}$ representa la cantidad por la que se multiplica la ecuación $j$ para sustraerla de la ecuación $i$, y así producir un cero en la entrada $(i, j)$.

A los números $a_{11}=a_{11}^{(2)}=2$, $a_{22}^{(2)}=-1$ y $a_{33}^{(3)}=-4$, que se utilizan para eliminar entradas que están en su misma columna, se les llama *pivotes*. Se han seguido los pasos anteriores de un modo sistematizado, con el fin de que conduzcan a un algoritmo fácilmente programable. Con esto se ha terminado la primera fase del proceso de la eliminación gaussiana, la llamada *eliminación hacia delante*, que ha permitido obtener un sistema reducido equivalente al inicial. Para culminar la resolución del sistema queda una segunda fase, llamada *sustitución hacia atrás o regresiva*, que consiste en hallar el valor de la incógnita de la última ecuación, sustituirla en la ecuación anterior calculando el valor de la otra incógnita, y así sucesivamente.

En el sistema anterior, de la tercera ecuación resulta $z=1$ y, llevado este valor a la segunda, se obtiene $y=2$. Finalmente, de la primera se obtiene $x=-1$.

**14.10.** Resolver por el método de Gauss, utilizando pivoteo parcial, el sistema:

$$\left.\begin{aligned} 0{,}003x_1+59{,}14x_2&=59{,}17 \\ 5{,}291x_1-6{,}130x_2&=46{,}78 \end{aligned}\right\}$$

cuya solución exacta es $x_1=10$ y $x_2=1$.

[2] Se designa con $a_{22}^{(2)}$ y $a_{32}^{(2)}$ a los coeficientes resultantes del paso 2), con la intención de distinguirlos de los originales.

**Resolución**

Al aplicar el algoritmo de Gauss sin pivoteo, se tiene:

$$a_{11} = 0{,}003; \qquad l_{21} = 5{,}291/0{,}003 = 1763{,}66$$

resultando el sistema escalonado:

$$\left.\begin{aligned} 0{,}003x_1 + 59{,}14x_2 &= 59{,}17 \\ -104300x_2 &= -104400 \end{aligned}\right\}$$

del que, al resolverlo por sustitución hacia atrás, se obtiene:

$$x_1 = -10{,}00; \quad x_2 = 1{,}001$$

produciéndose en $x_1$ un error del 200 %.

Para evitar esto, se toma como pivote en cada columna la entrada de mayor valor absoluto por debajo de la correspondiente entrada diagonal:

$$\left.\begin{aligned} 5{,}291x_1 - 6{,}130x_2 &= 46{,}78 \\ 0{,}003x_1 + 59{,}14x_2 &= 59{,}17 \end{aligned}\right\}$$

en el que, al aplicar de nuevo el algoritmo de Gauss, se tiene:

$$a_{11} = 5{,}291; \qquad l_{21} = 0{,}003/5{,}291 = 0{,}000567$$

resultando el sistema escalonado:

$$\left.\begin{aligned} 5{,}291x_1 - 6{,}130x_2 &= 46{,}78 \\ 59{,}1365x_2 &= 59{,}1965 \end{aligned}\right\}$$

del que, al resolverlo por sustitución hacia atrás, se obtiene:

$$x_1 = 10{,}001; \qquad x_2 = 1{,}001$$

**14.11.** Hallar la inversa de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

aplicando el método de Gauss-Jordan.

**Resolución**

La matriz ampliada $(A|I)$:

$$(A|I) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

restando a la segunda y tercera filas la primera multiplicada por 1 y 3, respectivamente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Las entradas subdiagonales de $A$ son iguales a cero. Para anular las entradas por encima de la diagonal de $A$, se restan de las filas primera y segunda la tercera fila multiplicada por 2 y 3, respectivamente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -10 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para anular la entrada $a_{12}$, se resta de la primera fila la segunda multiplicada por 1:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -10 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se cambia de signo la última fila:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -10 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} = (I|A^{-1})$$

Por tanto:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -10 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

**14.12.** Obtener la factorización de Doolittle de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

### Resolución

$$A = LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Multiplicando e igualando términos:

$$\left.\begin{aligned} u_{11} &= 1 \\ u_{12} &= 1 \\ u_{13} &= 2 \\ l_{21}u_{11} &= -1 \\ l_{21}u_{12} + u_{22} &= 0 \\ l_{21}u_{13} + u_{23} &= 1 \\ l_{31}u_{11} &= 2 \\ l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} &= 1 \\ l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} &= -1 \end{aligned}\right\}$$

Despejando las incógnitas y sustituyendo sus valores:

$$A = LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

**14.13.** Obtener la factorización de Cholesky de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

### Resolución

Si la matriz $A$ es definida positiva, admite la factorización de Choslesky. En efecto, los determinantes principales son positivos:

$$|4| > 0; \qquad \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 16 > 0; \qquad \begin{vmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 12 > 0$$

y, por tanto:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = LL^t = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ 0 & l_{22} & l_{32} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{pmatrix}$$

Multiplicando e igualando términos, se obtiene:

$$l_{11}^2 = 4 \Longrightarrow l_{11} = 2$$
$$l_{11}\, l_{21} = 2 \Longrightarrow l_{21} = 1$$
$$l_{11}\, l_{31} = 2 \Longrightarrow l_{31} = 1$$
$$l_{21}^2 + l_{22}^2 = 5 \Longrightarrow 1 + l_{22}^2 = 5 \Longrightarrow l_{22} = 2$$
$$l_{21}\, l_{31} + l_{22}\, l_{32} = 2 \Longrightarrow 1 + 2\, l_{32} = 2 \Longrightarrow l_{32} = \frac{1}{2}$$
$$l_{31}^2 + l_{32}^2 + l_{33}^2 = 2 \Longrightarrow 1 + \frac{1}{4} + l_{33}^2 = 2 \Longrightarrow l_{33} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Por tanto:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = LL^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1/2 \\ 0 & 0 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

**14.14.** Resolver el sistema:

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + x_3 &= 5 \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 3 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 &= 6 \end{aligned}\right\}$$

utilizando el método de Jacobi y redondeando a tres cifras decimales.

### Resolución

La matriz de los coeficientes posee diagonal estrictamente dominante:

$$|a_{11}| = 3 > |a_{12}| + |a_{13}| = 1 + 1 = 2$$
$$|a_{22}| = 4 > |a_{21}| + |a_{23}| = 1 + 2 = 3$$
$$|a_{33}| = 4 > |a_{31}| + |a_{32}| = 1 + 1 = 2$$

Por tanto, el método converge.

Se toma la aproximación inicial:

$$x_1^{(0)} = \frac{b_1}{a_{11}} = \frac{5}{3} = 1{,}667$$
$$x_2^{(0)} = \frac{b_2}{a_{22}} = \frac{3}{4} = 0{,}750$$
$$x_3^{(0)} = \frac{b_3}{a_{33}} = \frac{6}{4} = 1{,}500$$

Las fórmulas del método de Jacobi son:

$$x_1^{(r+1)} = \frac{5 - x_2^{(r)} - x_3^{(r)}}{3}$$
$$x_2^{(r+1)} = \frac{3 - x_1^{(r)} + 2x_3^{(r)}}{4}$$
$$x_3^{(r+1)} = \frac{6 - x_1^{(r)} - x_2^{(r)}}{4}$$

Para $r = 0$:

$$x_1^{(1)} = \frac{5 - 0{,}750 - 1{,}500}{3} = 0{,}917$$
$$x_2^{(1)} = \frac{3 - 1{,}667 + 2 \times 1{,}500}{3} = 1{,}083$$
$$x_3^{(1)} = \frac{6 - 1{,}667 - 0{,}750}{4} = 0{,}896$$

Para $r = 1$:

$$x_1^{(2)} = \frac{5 - 1{,}083 - 0{,}896}{3} = 1{,}007$$
$$x_2^{(2)} = \frac{3 - 0{,}917 + 2 \times 0{,}896}{3} = 0{,}994$$
$$x_3^{(2)} = \frac{6 - 1{,}007 - 1{,}083}{4} = 0{,}978$$

Para $r = 2$:

$$x_1^{(3)} = \frac{5 - 0{,}994 - 0{,}978}{3} = 1{,}009$$
$$x_2^{(3)} = \frac{3 - 1{,}007 + 2 \times 0{,}978}{3} = 0{,}987$$
$$x_3^{(3)} = \frac{6 - 1{,}007 - 0{,}994}{4} = 1$$

Para $r = 3$:

$$x_1^{(4)} = \frac{5 - 0{,}987 - 1}{3} = 1{,}004$$
$$x_2^{(4)} = \frac{3 - 1{,}009 + 2 \times 1}{3} = 0{,}998$$
$$x_3^{(4)} = \frac{6 - 1{,}007 - 0{,}987}{4} = 1{,}001$$

Para $r = 4$:

$$x_1^{(5)} = \frac{5 - 0{,}998 - 1{,}001}{3} = 1$$
$$x_2^{(5)} = \frac{3 - 1{,}004 + 2 \times 1{,}001}{3} = 1$$
$$x_3^{(5)} = \frac{6 - 1{,}004 - 0{,}998}{4} = 1$$

El método converge tras cuatro iteraciones:

$$x_1 = 1; \quad x_2 = 1; \quad x_3 = 1$$

**14.15.** Resolver el sistema del ejercicio anterior:

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + x_3 &= 5 \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 3 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 &= 6 \end{aligned}\right\}$$

utilizando el método de Gauss-Seidel y redondeando a tres cifras decimales.

### Resolución

La matriz de los coeficientes posee diagonal estrictamente dominante. Por tanto, el método converge. Se toma la aproximación inicial:

$$x_1^{(0)} = \frac{b_1}{a_{11}} = \frac{5}{3} = 1{,}667$$
$$x_2^{(0)} = \frac{b_2}{a_{22}} = \frac{3}{4} = 0{,}750$$
$$x_3^{(0)} = \frac{b_3}{a_{33}} = \frac{6}{4} = 1{,}500$$

Las fórmulas del método de Gauss-Seidel son:

$$x_1^{(r+1)} = \frac{5 - x_2^{(r)} - x_3^{(r)}}{3}$$
$$x_2^{(r+1)} = \frac{3 - x_1^{(r+1)} + 2x_3^{(r)}}{4}$$
$$x_3^{(r+1)} = \frac{6 - x_1^{(r+1)} - x_2^{(r+1)}}{4}$$

Para $r = 0$:

$$x_1^{(1)} = \frac{5 - 0{,}750 - 1{,}500}{3} = 0{,}917$$
$$x_2^{(1)} = \frac{3 - 0{,}917 + 2 \times 1{,}500}{3} = 1{,}271$$
$$x_3^{(1)} = \frac{6 - 0{,}917 - 1{,}271}{4} = 0{,}953$$

Para $r = 1$:

$$x_1^{(2)} = \frac{5 - 1{,}271 - 0{,}953}{3} = 0{,}925$$
$$x_2^{(2)} = \frac{3 - 0{,}925 + 2 \times 0{,}953}{3} = 0{,}995$$
$$x_3^{(2)} = \frac{6 - 0{,}925 - 0{,}995}{4} = 1{,}020$$

Para $r = 2$:

$$x_1^{(3)} = \frac{5 - 0{,}995 - 1{,}020}{3} = 0{,}995$$
$$x_2^{(3)} = \frac{3 - 0{,}995 + 2 \times 1{,}020}{3} = 1{,}011$$
$$x_3^{(3)} = \frac{6 - 0{,}995 - 1{,}011}{4} = 0{,}998$$

Para $r = 3$:

$$x_1^{(4)} = \frac{5 - 1{,}011 - 0{,}998}{3} = 0{,}997$$
$$x_2^{(4)} = \frac{3 - 0{,}997 + 2 \times 0{,}998}{3} = 1$$
$$x_3^{(4)} = \frac{6 - 0{,}997 - 1}{4} = 1{,}001$$

Para $r = 4$:

$$x_1^{(5)} = \frac{5 - 1 - 1{,}001}{3} = 1$$
$$x_2^{(5)} = \frac{3 - 1 + 2 \times 1{,}001}{3} = 1$$
$$x_3^{(5)} = \frac{6 - 1 - 1}{4} = 1$$

El método converge tras cuatro iteraciones:

$$x_1 = 1; \quad x_2 = 1; \quad x_3 = 1$$

**14.16.** Calcular la integral:

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{1 + x^2}\, dx$$

a) Mediante la fórmula del valor medio para $n = 5$.
b) Mediante la fórmula de Simpson.
c) Mediante la fórmula de Simpson compuesta para $n = 4$.
d) Mediante un desarrollo en serie.
e) Comparar estas aproximaciones con el resultado exacto.

**Resolución**

a) Tomando $n = 5$;

$$h = \frac{1/2 - 0}{5} = 0{,}1$$

y

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{1 + x^2}\, dx \approx \frac{0{,}1}{2}\left[1 + 2f(0{,}1) + 2f(0{,}2) + 2f(0{,}3) + 2f(0{,}4) + f(0{,}5)\right]$$
$$= 0{,}4631\ldots$$

b) Se calcula el valor de $h$:

$$h = \frac{1/2 - 0}{2} = 0{,}25$$

y

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{1+x^2}\,dx \approx \frac{1}{12}[f(0) + 4f(0{,}25) + f(0{,}5)] = 0{,}4637\ldots$$

c) Tomando $n = 4$ (par):

$$h = \frac{1/2 - 0}{4} = 0{,}125$$

y

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{1+x^2}\,dx \approx \frac{1}{24}[f(0) + 4f(0{,}125) + 2f(0{,}25) + 4f(0{,}375) + f(0{,}5)] = 0{,}4637\ldots$$

d) El desarrollo de McLaurin de $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$:

$$\begin{array}{lcl}
f(x) = \dfrac{1}{1+x^2} & \Longrightarrow & f(0) = 1 \\
f'(x) = \dfrac{-2x}{(1+x^2)^2} & \Longrightarrow & f'(0) = 0 \\
f''(x) = \dfrac{-2+6x^2}{(1+x^2)^3} & \Longrightarrow & f''(0) = -2 \\
f'''(x) = \dfrac{24x - 24x^3}{(1+x^2)^4} & \Longrightarrow & f'''(0) = 0 \\
f^{IV}(x) = \dfrac{120x^4 - 240x^2 + 24}{(1+x^2)^5} & \Longrightarrow & f^{IV}(0) = 24 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & &
\end{array}$$

y

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{1+x^2}\,dx \approx \int_0^{1/2} (1 + 0 - x^2 + 0 + x^4 + \ldots)\,dx$$

$$= \left[x - \frac{x^3}{3} + \frac{x5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \ldots\right]_0^{1/2} = 0{,}4636\ldots$$

e) Es fácil comprobar que:

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{1+x^2}\,dx = [\operatorname{arc\,tg} x]_0^{1/2} = \operatorname{arc\,tg} 1/2 = 0{,}4634\ldots$$

**14.17.** Calcular:

$$\int_0^1 \operatorname{sen}\sqrt{x}\,dx$$

mediante la fórmula del valor medio para $n = 4$, redondeando a tres cifras decimales.

### Resolución

Ya que $n = 4$, se tiene que:

$$h = \frac{1-0}{4} = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

Aplicando la fórmula del valor medio:

$$\int_0^1 \sqrt{x}\,dx \approx \frac{1}{8}\Big[f(0) + 2\times f(0{,}25) + 2\times f(0{,}5) + 2\times f(0{,}75) + f(1)\Big]$$
$$= \frac{1}{8}\,[0 + 2\times 0{,}479 + 2\times 0{,}650 + 2\times 0{,}762 + 0{,}841)$$
$$= \frac{1}{8}\,(0{,}958 + 1{,}300 + 1{,}524 + 0{,}841) = 0{,}578$$

**14.18.** Calcular:

$$\int_0^1 \operatorname{sen}\sqrt{x}\,dx$$

mediante la regla de Simpson para $n = 4$, redondeando a tres cifras decimales.

### Resolución

Ya que $n = 4$, se tiene que:

$$h = \frac{1-0}{4} = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

Aplicando la fórmula de Simpson:

$$\int_0^1 \sqrt{x}\,dx \approx \frac{1}{12}\Big[f(0) + 4\times f(0{,}25) + 2\times f(0{,}5) + 4\times f(0{,}75) + f(1)\Big]$$
$$= \frac{1}{12}\,[0 + 4\times 0{,}479 + 2\times 0{,}650 + 4\times 0{,}762 + 0{,}841)$$
$$= \frac{1}{12}\,(1{,}916 + 1{,}300 + 3{,}048 + 0{,}841) = 0{,}592$$

**14.19.** Emplear el método de Euler para aproximar el valor de $y(0{,}4)$, dada la ecuación diferencial:

$$y' = \frac{x}{y}, \quad y(0) = 1$$

tomando cuatro cifras decimales y $h = 0{,}1$.

### Resolución

Se tiene que $f(x, y) = \dfrac{x}{y}$, $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, por tanto:

$$y_1 = y_0 + h\cdot f(x_0, y_0) = 1 + 0{,}1\cdot 0 = 1$$

Como $x_1 = 0{,}1$, $x_2 = 0{,}2, \ldots$:

$$y_2 = y_1 + h\cdot f(x_1, y_1) = 1 + 0{,}1\,\frac{0{,}1}{1} = 1{,}01$$
$$y_3 = y_2 + h\cdot f(x_2, y_2) = 1{,}01 + 0{,}1\,\frac{0{,}2}{1{,}01} = 1{,}0298$$
$$y_4 = y_3 + h\cdot f(x_3, y_3) = 1{,}0298 + 0{,}1\,\frac{0{,}3}{1{,}0298} = 1{,}0589$$

Tomando la solución exacta $y^2 = x^2 + 1$, puesto que:

$$y\,dy = x\,dx \Longrightarrow y^2 = x^2 + C$$

y $C = 1$, ya que $y(0) = 1$. Por tanto, $y(0,4) = \sqrt{0{,}4^2 + 1} = 1{,}077$.

Los cálculos se pueden resumir en una tabla:

| $k$ | $x_k$ | $y_k$ | $f(x_k, y_k)$ | $h \cdot f(x_k, y_k)$ | Solución exacta ($y^2 = x^2 + 1$) |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0,1 | 1 | 0 | 0 | 1,0050 |
| 2 | 0,2 | 1,01 | 0,1 | 0,01 | 1,0980 |
| 3 | 0,3 | 1,0298 | 0,298 | 0,0298 | 1,0440 |
| 4 | 0,4 | 1,0589 | | | 1,0770 |

# PROBLEMAS PROPUESTOS

**14.20.** Dada la tabla de valores de la función $y = f(x)$:

| $x$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|
| $y$ | $-1$ | $-1$ | $1$ | $3$ |

a) Hallar el polinomio interpolador de Lagrange.
b) Hallar el polinomio interpolador de Newton.
c) Calcular $f(1/2)$.

**14.21.** Hallar la raíz de $e^x + 2x = 0$ con un error menor que $10^{-2}$, utilizando los métodos de bipartición y de Newton.

**14.22.** Aproximar la integral:

$$\int_2^6 \frac{dx}{x}$$

a) Mediante la fórmula del valor medio (n=4).
b) Mediante la regla de Simpson compuesta (n=4).
c) Comprobar estas aproximaciones con el resultado exacto.

**14.23.** Realizar el ejercicio anterior para la integral:

$$\int_1^3 \sqrt{2+x}$$

**14.24.** Resolver lo mismo para la integral:

$$\int_1^5 \ln x \, dx$$

**14.25.** Calcular la integral:

$$\int_0^1 e^{-x^2} \, dx$$

a) Mediante la fórmula del valor medio ($n = 4$).
b) Mediante la regla de Simpson compuesta ($n = 4$).

**14.26.** La función $f(x)$ viene definida mediante la tabla:

| $x$ | 0 | 20 | 40 | 60 | 80 | 100 | 120 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | 22 | 41 | 53 | 38 | 17 | 0 |

Aproximar el área bajo la función mediante la fórmula de Simpson.

**14.27.** Emplear el método de Euler para aproximar el valor de $y(0{,}3)$, dada la ecuación diferencial:

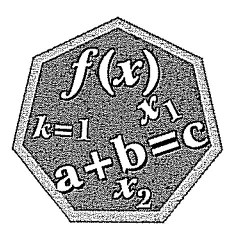
$$y' = y - x, \quad y(0) = 2$$

tomando cuatro cifras decimales y $h = 0{,}1$.

**14.28.** Emplear el método de Euler para aproximar el valor de $y(0{,}5)$, dada la ecuación diferencial:

$$y' = (x - y)^2, \quad y(0) = 1/2$$

tomando cuatro cifras decimales y $h = 0{,}1$.




# APÉNDICE: FORMULARIO



## A.1. ÁREAS Y VOLÚMENES

Breve resumen de las fórmulas de la Geometría elemental:

**Rectángulo.** Área = $a\ b$, siendo $a$ y $b$ las longitudes de los lados.

**Cuadrado.** Área = $l^2$, siendo $l$ la longitud del lado.

**Trapecio.** Área = $\frac{a+b}{2}\ h$, siendo $a$ la base mayor, $b$ la base menor y $h$ la altura.

**Circunferencia.** Longitud = $2\ \pi\ r$, siendo $r$ el radio.

**Círculo.** Área = $\pi\ r^2$, siendo $r$ el radio.

**Sector circular.** Área = $\frac{1}{2}\ l\ r$, siendo $l$ la longitud del arco y $r$ el radio de la circunferencia.

**Paralelepípedo rectangular.** Volumen = $a\ b\ c$; superficie = $2(ab+ac+bc)$, siendo $a$, $b$ y $c$ las longitudes de las aristas.

**Cubo.** Volumen = $a^3$; superficie = $6a^2$, siendo $a$ la longitud de la arista.

**Prisma.** Volumen = $B\ h$, siendo $B$ el área de la base y $h$ la altura.

**Cilindro.** Volumen = $\pi\ r^2\ h$; superficie = $2\pi\ r\ h + 2\pi\ r^2$, siendo $r$ el radio y $h$ la altura.

**Cono.** Volumen = $\frac{1}{3}\ \pi\ r^2\ h$; superficie = $\pi\ r\ g$, siendo $r$ el radio, $h$ la altura y $g$ la generatriz.

**Tronco de cono.** Volumen = $\frac{\pi\ h}{3}\ (R^2 + r^2 + Rr)$, siendo $R$ y $r$ los radios, y $h$ la altura.

**Esfera.** Volumen = $\frac{4}{3}\ \pi\ r^3$; superficie = $4\ \pi\ r^2$, siendo $r$ el radio.

**Pirámide.** Volumen = $\frac{1}{3}\ B\ h$, siendo $B$ el área de la base y $h$ la altura.

## A.2. LOGARITMOS

Se llama función logarítmica de base $a$ ($a \neq 1$ y $a > 0$) a la función inversa de la función exponencial, es decir:

$$y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y$$

Si la base es $a = 10$, se escribe $\log\ x$, sin indicar la base, y se lee "logaritmo decimal de x".
Si la base es el número $e$, se escribe $\ln x$ o $Lx$, y se lee "logaritmo natural o neperiano de x".

## PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS

1. $\log_a 1 = 0$.
   En efecto, si $\log_a 1 = x \Longrightarrow a^x = 1 \Longrightarrow x = 0$.
2. $\log_a a = 1$.
   En efecto, si $\log_a a = x \Longrightarrow a^x = a \Longrightarrow x = 1$.
3. El dominio de la función logarítmica es $(0, \infty)$.
   Evidentemente, los números negativos carecen de logaritmo, ya que si, por ejemplo, se quiere calcular $\log_a(-2)$, se llega a un absurdo: $\log_a(-2) = x \Longrightarrow a^x = -2$. Dado que $a > 0$, la expresión $a^x$ es siempre positiva para todo valor de $x$ y $a^x = -2$ carece de solución.
4. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_b y$.
   Tomando $\log_a x = m$ y $\log_a y = n$, se tiene que $a^m = x$ y $a^n = y$. Entonces:

$$xy = a^m\, a^n = a^{m+n} \Longrightarrow \log_a(xy) = m + n = \log_a x + \log_a y$$

5. $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_b y$.
   Tomando $\log_a x = m$ y $\log_a y = n$, se tiene que $a^m = x$ y $a^n = y$. Entonces:

$$\frac{x}{y} = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \Longrightarrow \log_a\left(\frac{x}{y}\right) = m - n = \log_a x - \log_a y$$

6. $\log_a x^n = n\, \log_a x$.
   Evidentemente:

$$\log_a x^n = \log_a\,(x \cdot x \cdot x \cdots x) = \log_a x + \log_a x + \ \ldots\ + \log_a x = n\, \log_a x$$

7. Cambio de la base $a$ a otra base $b$: $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$.
   Sea $\log_a x = N \Longrightarrow a^N = x$. Tomando logaritmos en la base $b$:

$$\log_b a^N = \log_b x \Longrightarrow N\, \log_b a = \log_b x \Longrightarrow N = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$



# A.3. PROGRESIONES

## PROGRESIONES ARITMÉTICAS

Se llama progresión aritmética a una sucesión de números tales que cada uno es igual al anterior sumado con una cantidad constante $d$, llamada *diferencia* de la progresión. Los términos se enumeran mediante subíndices. Por tanto:

$$a_2 = a_1 + d$$
$$a_3 = a_2 + d = a_1 + d + d = a_1 + 2d$$
$$a_4 = a_3 + d = a_1 + 2d + d = a_1 + 3d$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

En general:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

Entonces, un término cualquiera $a_n$ es igual al primer término más tantas veces la diferencia $d$ como términos $n-1$ le precedan.

■ PROPOSICIÓN A.1 *En una progresión aritmética, la suma de términos equidistantes de los extremos es constante e igual a la suma de estos. Esto es,* $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \ \ldots.$

**Suma de los términos.**

Dada la progresión aritmética $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \dots\ ,\ a_n$ y la suma $S$ de sus términos:

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \ \dots\ + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$

o también:

$$S = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ \dots\ + a_3 + a_2 + a_1$$

Sumando miembro a miembro las dos igualdades anteriores:

$$2S = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \ \dots\ + (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

Por la propiedad anterior, todos los paréntesis son iguales a $a_1 + a_n$:

$$2S = (a_1 + a_n)\, n$$

luego:

$$S = \frac{a_1 + a_n}{2}\, n$$

## PROGRESIONES GEOMÉTRICAS

Se llama progresión geométrica a una sucesión de números tales que cada uno es igual al anterior multiplicado por una cantidad constante $r$, llamada *razón* de la progresión. Por tanto:

$$a_2 = a_1 r$$
$$a_3 = a_2 r = a_1 r r = a_1 r^2$$
$$a_4 = a_3 r = a_1 r^2 r = a_1 r^3$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

En general:

$$a_n = a_1\, r^{n-1}$$

Entonces, un término cualquiera $a_n$ es igual al primer término multiplicado por la razón $r$ elevada al número de términos $n - 1$ que le precedan.

**Suma de los términos.**

Dada la progresión geométrica $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \dots\ ,\ a_n$ y la suma $S$ de sus términos:

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \ \dots\ + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$

Multiplicando por la razón $r$ ambos miembros:

$$Sr = a_2 + a_3 + a_4 + \ \dots\ + a_{n-1} + a_n + a_n r$$

Restando de esta igualdad la anterior:

$$Sr - S = -a_1 + a_n r$$

Despejando $S$:

$$S = \frac{a_n r - a_1}{r - 1}$$

Sustituyendo $a_n = a_1\, r^{n-1}$:

$$S = \frac{a_1 (r^n - 1)}{r - 1}$$

### PROGRESIONES GEOMÉTRICAS DECRECIENTES

Si la razón de una progresión geométrica es $|r| < 1$, entonces $r^n$ decrece y se hace menor que cualquier número $\epsilon$, por pequeño que sea, cuando $n$ tiende a infinito; es decir, $r^n$ tiende a cero. La fórmula anterior de la suma queda ahora:

$$S = \frac{a_1}{1 - r}$$

que es el límite de la suma de los infinitos términos de una progresión geométrica decreciente.

## A.4. TRIGONOMETRÍA

Para medir ángulos y arcos de circunferencia se utiliza el grado sexagesimal y el radián. El *grado sexagesimal* es el resultado de dividir la circunferencia en 360 partes iguales. A su vez, cada grado sexagesimal se divide en 60 partes iguales llamadas *minutos sexagesimales* y cada minuto, en 60 partes llamadas *segundos sexagesimales*. Se representan con los símbolos °, ', ", respectivamente. Por ejemplo, $A = 12°15'28''$; el ángulo $A$ mide 12 grados, 15 minutos y 28 segundos.

Otra medida muy utilizada es el *radián*: Un arco de circunferencia mide un *radián* si su longitud es igual a la longitud del radio de dicha circunferencia. Puesto que la longitud de la circunferencia es igual a $2\pi r$, esto es, $2\pi$ veces el radio $r$, la medida en radianes de la circunferencia será igual a $2\pi$.

Por tanto, dado que la medida en radianes de la circunferencia es igual a $2\pi$ y en grados es 360°, es sencillo transformar grados sexagesimales en radianes y viceversa, por simple proporcionalidad. Así, 180° equivale a $\pi$ radianes, 90° a $\frac{\pi}{2}$, etc.

### RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO

Sea un ángulo $\alpha$. Se situa en unos ejes de coordenadas haciendo coincidir su vértice con el origen $O$ y uno de sus lados con el eje de abscisas; trazando perpendiculares a dicho eje, se forman los triángulos rectángulos semejantes $OA_1B_1$, $OA_2B_2$, ... Se definen las razones trigonométricas seno, coseno y tangente del modo siguiente:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{A_1B_1}{OB_1} = \frac{A_2B_2}{OB_2} = \frac{y}{r}$$

$$\cos\alpha = \frac{OA_1}{OB_1} = \frac{OA_2}{OB_2} = \frac{x}{r}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{A_1B_1}{OA_1} = \frac{A_2B_2}{OB_2} = \frac{x}{y}$$

Y las razones trigonométricas inversas:

$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{r}{y}; \quad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{r}{x}; \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{y}{x}$$

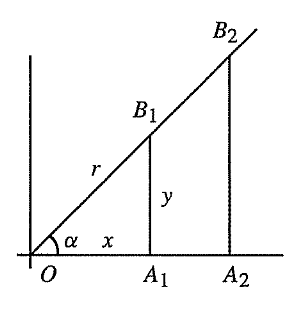



**Figura A.1**

Puesto que $r$ es arbitrario, se puede tomar $r = 1$, con lo que:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{y}{r} = \frac{y}{1} = y \qquad \cos\alpha = \frac{x}{r} = \frac{x}{1} = x$$

Considerando la llamada *circunferencia trigonométrica*, con centro en el origen $O$ y radio $r = 1$, al situar un ángulo $\alpha$ en los ejes de coordenadas (con vértice en $O$ y un lado sobre el eje de abscisas), los segmentos $x$ e $y$ son los valores de cos $\alpha$ y sen $\alpha$, respectivamente:

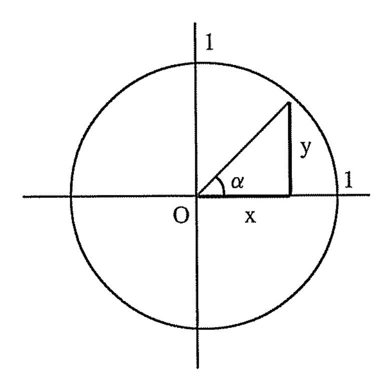



**Figura A.2**

Para un ángulo del primer cuadrante (de 0° a 90°), el seno y el coseno son positivos, ya que la abscisa $x$ y la ordenada $y$ son positivas (ver Figura A.2). En cambio, para un ángulo del segundo cuadrante (de 90° a 180°), el seno es positivo y el coseno es negativo, puesto que la ordenada $y$ es positiva y la abscisa $x$ es negativa. En resumen:

| | Primer cuadrante | Segundo cuadrante | Tercer cuadrante | Cuarto cuadrante |
|---|---|---|---|---|
| $\operatorname{sen}\alpha$ | + | + | − | − |
| $\cos\alpha$ | + | − | − | + |
| $\operatorname{tg}\alpha$ | + | − | + | − |

## FÓRMULA FUNDAMENTAL DE TRIGONOMETRÍA

Volviendo a la Figura A.2:

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = x^2 + y^2 = 1$$

según el teorema de Pitágoras.

La relación $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ se conoce como la *fórmula fundamental de trigonometría*.

De ella se deducen, dividiendo por $\cos^2 x$ y $\operatorname{sen}^2 x$, las fórmulas:

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x; \qquad 1 + \operatorname{ctg}^2 x = \operatorname{cosec}^2 x$$

## RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS NOTABLES

| | 0° | 30° | 45° | 60° | 90° |
|---|---|---|---|---|---|
| sen | 0 | $1/2$ | $\sqrt{2}/2$ | $\sqrt{3}/2$ | 1 |
| cos | 1 | $\sqrt{3}/2$ | $\sqrt{2}/2$ | $1/2$ | 0 |
| tg | 0 | $\sqrt{3}/3$ | 1 | $\sqrt{3}$ | $\infty$ |

## RAZONES DE ÁNGULOS COMPLEMENTARIOS

$$\operatorname{sen}(90° - \alpha) = \cos\alpha$$
$$\cos(90° - \alpha) = \operatorname{sen}\alpha$$
$$\operatorname{tg}(90° - \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha$$

## RAZONES DE ÁNGULOS SUPLEMENTARIOS

$$\operatorname{sen}(180° - \alpha) = \operatorname{sen}\alpha$$
$$\cos(90° - \alpha) = -\cos\alpha$$
$$\operatorname{tg}(90° - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$$

## RAZONES DE ÁNGULOS OPUESTOS

$$\operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$$
$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$$
$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$$

## RAZONES DE ÁNGULOS QUE DIFIEREN EN $90°$

$$\operatorname{sen}(90° + \alpha) = \cos\alpha$$
$$\cos(90° + \alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$$
$$\operatorname{tg}(90° + \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$$

## RAZONES DE ÁNGULOS QUE DIFIEREN EN $180°$

$$\operatorname{sen}(180° + \alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$$
$$\cos(180°\alpha) = -\cos\alpha$$
$$\operatorname{tg}(180° + \alpha) = \operatorname{tg}\alpha$$

## RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE $\alpha + \beta$ Y $\alpha + \beta$

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$$
$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$$
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$$
$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$$
$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$
$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

## RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DEL ÁNGULO DOBLE

$$\operatorname{sen} 2\alpha = 2 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha$$
$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$$

## RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DEL ÁNGULO MITAD

$$\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$
$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$
$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

## TRANSFORMACIÓN DE SUMAS Y DIFERENCIAS EN PRODUCTOS

$$\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B = 2\operatorname{sen}\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$
$$\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B = 2\cos\frac{A+B}{2}\operatorname{sen}\frac{A-B}{2}$$
$$\cos A + \cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$
$$\cos A - \cos B = -2\operatorname{sen}\frac{A+B}{2}\operatorname{sen}\frac{A-B}{2}$$

## FÓRMULAS PARA TRIÁNGULOS

En un triángulo cualquiera de vértices A, B y C, y lados opuestos a ellos, a, b y c, se verifica:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C} \qquad \text{(teorema del seno)}$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2ac\cos A \qquad \text{(teorema del coseno)}$$
$$S = \frac{1}{2}bc\operatorname{sen} A$$
$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \quad \text{con } p = \frac{a+b+c}{2}$$

## A.5. FUNCIONES HIPERBÓLICAS

Para las funciones hiperbólicas se verifica una serie de fórmulas análogas a las de las funciones circulares:

$$\operatorname{th} 2x = \frac{\operatorname{th} x + \operatorname{th} y}{1 + \operatorname{th} x \operatorname{th} y} \qquad \operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y \qquad \operatorname{ch} x + \operatorname{ch} y = 2 \operatorname{ch} \frac{x+y}{2} \operatorname{ch} \frac{x-y}{2}$$

$$\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} \ y \qquad \operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{th} x + \operatorname{th} y}{1 + \operatorname{th} x \operatorname{th} y} \qquad \operatorname{sh} x + \operatorname{sh} y = 2 \operatorname{sh} \frac{x+y}{2} \operatorname{ch} \frac{x-y}{2}$$

$$\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 y \qquad \operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y \qquad \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh} 2x = 1$$

## A.6. COMBINATORIA

**Variaciones de $m$ elementos tomados de $n$ en $n$.**

$$V_{m,n} = m(m-1)(m-2)\ \ldots\ (m-n+1)$$

**Permutaciones de $n$ elementos.**

$$n! = n(n-1)(n-2)(n-3)\ \ldots\ 3.2.1$$

**Variaciones con repetición de $m$ elementos tomados de $n$ en $n$.**

$$VR_{m,n} = m^n$$

**Combinaciones de $m$ elementos tomados de $n$ en $n$.**

$$C_{m,n} = \binom{m}{n} = \frac{V_{m,n}}{P_n} = \frac{m!}{n!\,(m-n)!}$$

### PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS COMBINATORIOS

$$\binom{m}{0} = 1$$

$$\binom{m}{1} = m$$

$$\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n}$$

$$\binom{m}{n} + \binom{m}{n+1} = \binom{m+1}{n+1}$$

**Permutaciones con repetición de $m$ elementos, entre los que $a$ son iguales, $b$ son iguales, $c$ son iguales, etc., con $a + b + c + \cdots = m$.**

$$PR_m^{a,b,c,\ldots} = \frac{m!}{a!\,b!\,c!\ \ldots}$$

**Combinaciones con repetición de $m$ elementos tomados de $n$ en $n$.**

$$CR_{m,n} = \binom{m+n-1}{n}$$

## BINOMIO DE NEWTON

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

## A.7. GEOMETRÍA ANALÍTICA PLANA

**Distancia entre los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$.**

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

**Ecuación de la recta que pasa por los puntos $P(x_1, y_1)$ y $P(x_2, y_2)$.**

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

**Ecuación de la recta que pasa por el punto $P(x_1, y_1)$ y tiene pendiente igual a $m$.**

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

**Distancia del punto $P(x_1, y_1)$ a la recta $ax + by + c = 0$.**

$$d = \left| \frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$$

**Ángulo de dos rectas de pendiente $m_2$ y $m_1$.**

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

**Área de un triángulo de vértices los puntos $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$ y $(x_3, y_3)$.**

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

## A.8. VECTORES EN $\mathbb{R}^3$

**Módulo del vector $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3) = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}$, donde $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 0, 1)$ y $\vec{k} = (0, 0, 1)$.**

$$|v| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$$

**Vector unitario en la dirección del vector $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$.**

$$\left(\frac{v_1}{|\vec{v}|}, \frac{v_2}{|\vec{v}|}, \frac{v_3}{|\vec{v}|}\right)$$

**Vector de origen $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y extremo $P_2(x_2, y_2, z_2)$.**

$$\vec{v} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

**Producto escalar de los vectores $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ y $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$.**

$$\vec{v}.\vec{w} = v_1\, w_1 + v_2\, w_2 + v_3\, w_3$$

**Propiedades del producto escalar.**

1. $\vec{v}.\vec{w} = |\vec{v}||\vec{w}| \cos\alpha$, siendo $\alpha$ el ángulo de los dos vectores.
2. Dos vectores son ortogonales (perpendiculares), si su producto escalar es igual a cero:

$$\vec{v}.\vec{w} = |\vec{v}||\vec{w}|\ \cos\ 90° = 0$$

**Cosenos directores de un vector.**

$\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$:

$$\cos\alpha = \frac{v_1}{|\vec{v}|}$$
$$\cos\beta = \frac{v_2}{|\vec{v}|}$$
$$\cos\gamma = \frac{v_3}{|\vec{v}|}$$

siendo $\alpha$, $\beta$ y $\gamma$ los ángulos que forma $\vec{v}$ con los vectores $\vec{i}$, $\vec{j}$ y $\vec{k}$.

**Producto vectorial de dos vectores.**

$\vec{v} = (v_1, v_2, w_3)$ y $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$. Se define como:

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

**Propiedades del producto vectorial.**

1. $\vec{v} \times \vec{w} = -\vec{w} \times \vec{v}$.
2. $\vec{v} \times \vec{v} = 0$.
3. $|\vec{v} \times \vec{w}| = |\vec{v}||\vec{w}| \operatorname{sen} \alpha$, siendo $\alpha$ el ángulo que forman $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

● NOTA *Todas las propiedades anteriores son válidas para todos los vectores de* $\mathbb{R}^n$, $n = 2, 3, \ldots$

## A.9. GEOMETRÍA ANALÍTICA EN $\mathbb{R}^3$

**Distancia entre los puntos** $P_1(x_1, y_1, z_1)$ **y** $P_2(x_2, y_2, z_2)$**.**

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

**Ecuación de la recta que pasa por** $P(x_1, y_1, z_1)$ **y** $P(x_2, y_2, z_2)$**.**

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

**Ecuación de la recta que pasa por el punto** $P(x_1, y_1, z_1)$ **y tiene de vector direccional** $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$**.**

$$\frac{x - x_1}{v_1} = \frac{y - y_1}{v_2} = \frac{z - z_1}{v_3}$$

**Ecuación general del plano.**

$$ax + by + cz + d = 0$$

donde $\vec{v} = (a, b, c)$ es un vector perpendicular al plano.

**Plano que pasa por los tres puntos** $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$ **y** $P_3(x_3, y_3, z_3)$**.**

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

**Ecuación de la recta que pasa por** $P(x_0, y_0, z_0)$ **y es perpendicular al plano** $ax + by + cz + d = 0$.

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

**Distancia del punto** $P(x_0, y_0, z_0)$ **al plano** $ax + by + cz + d = 0$.

$$d = \left| \frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right|$$

## A.10. CÓNICAS

La ecuación general de una cónica viene dada por:

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$$

**Ecuación de la parábola de vértice en $(0, 0)$ y foco $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$.**

$$y^2 = 2px$$

Con vértice en $(0, 0)$ y foco $\left(0, \frac{p}{2}\right)$:

$$x^2 = 2py$$

Con vértice en $(h, k)$ y eje $y = k$:

$$(y - k)^2 = 2p(x - h)$$

Con vértice en $(h, k)$ y eje $x = h$:

$$(x - h)^2 = 2p(y - k)$$

**Ecuación general de la circunferencia.**

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

**Ecuación de la circunferencia de centro $(a, b)$ y radio $r$.**

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

**Ecuación de la elipse de centro $(h, k)$, y semiejes $a$ y $b$, respecto a los ejes $OX$ y $OY$, respectivamente:**

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$$

Se verifica que $a^2 = b^2 + c^2$, siendo $(c, 0)$ y $(-c, 0)$ los focos.

**Ecuación de la hipérbola de centro $(h, k)$ con semieje real $a$, semieje imaginario $b$, respecto a los ejes $OX$ y $OY$, respectivamente.**

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} - \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$$

Se verifica que $b^2 = c^2 - a^2$, siendo $(c, 0)$ y $(-c, 0)$ los focos.

**Clasificación de las cónicas.**

La ecuación general de una cónica viene dada por

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

Considerando la matriz:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = 0$$

y los determinantes:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix}; \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$$

se establece la clasificación:

1. Si:

$$A_{33} > 0 \begin{cases} a_{11}|A| < 0 \Longrightarrow \text{elipse real} \\ a_{11}|A| > 0 \Longrightarrow \text{elipse imaginaria} \\ |A| = 0 \Longrightarrow \text{dos rectas secantes imaginarias} \end{cases}$$

2. Si:

$$A_{33} < 0 \begin{cases} |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{hipérbola} \\ |A| = 0 \Longrightarrow \text{dos rectas secantes reales} \end{cases}$$

3. Si:

$$A_{33} = 0 \begin{cases} |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{parábola} \\ |A| = 0 \begin{cases} a_{11} \neq 0 \begin{cases} A_{11} < 0 \Longrightarrow \text{dos rectas paralelas} \\ A_{11} > 0 \Longrightarrow \text{dos rectas paralelas imaginarias} \\ A_{11} = 0 \Longrightarrow \text{dos rectas coincidentes} \end{cases} \\ a_{11} = 0 \text{ y } a_{22} \neq 0 \begin{cases} A_{22} < 0 \Longrightarrow \text{dos rectas paralelas reales} \\ A_{22} > 0 \Longrightarrow \text{dos rectas paralelas imaginarias} \\ A_{22} = 0 \Longrightarrow \text{dos rectas coincidentes} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

**Centro de una cónica.**

Las coordenadas del centro de una cónica se hallan resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0 \\ a_{12}x + a_{22}y + a_{23} = 0 \end{cases}$$

**Ejes de una cónica.**

Vienen dados por las rectas:

$$y - y_1 = m_1(x - x_1)$$
$$y - y_1 = m_2(x - x_1)$$

siendo $(x_1, y_1)$ las coordenadas del centro de la cónica, y $m_1$ y $m_2$ las soluciones de la ecuación:

$$a_{12}m^2 + (a_{11} - a_{22})m - a_{12} = 0$$

Si $a_{11} = a_{22}$, se trata de una parábola y el eje es único.

**Vértices de una cónica.**

Vienen dados por las intersecciones de los ejes con la cónica.

# SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS PROPUESTOS

## CAPÍTULO 1

**1.21.** $x = -\dfrac{260}{111}$.

**1.32.** $x \in (-3, 1) \cup (2, 8)$.

**1.33.** a) $\left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{2}\right)$; b) $(-\infty, -11] \cup [3, \infty)$.

**1.34.** a) $(0, 1)$; b) $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

**1.35.** $\mathbb{R}$.

**1.36.** a) Cierta; b) falsa; c) falsa; d) cierta.

**1.37.** a) $\emptyset$; b) $\mathbb{N}$; c) $\emptyset$; d) $\mathbb{N}$; e) $F_i(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$, $F_e(\mathbb{N}) = \emptyset$.

**1.38.** a) $\emptyset$; b) $\emptyset$; c) $\mathbb{R}$; d) $F_i(\mathbb{I}) = \mathbb{I}$, $F_e(\mathbb{I}) = \mathbb{Q}$ .

**1.39.** a) $\mathbb{R}$; b) $\emptyset$; c) $\mathbb{R}$; d) $\mathbb{R}$; e) $F_i(\mathbb{R}) = \emptyset$, $F_e(\mathbb{R}) = \emptyset$.

**1.40.** Sup $A$ = máx $A = 2$, ínf $A = 1$. Carece de mínimo.

**1.41.** Sup $B = 1$, ínf $B = 0$. Carece de máximo y de mínimo.

**1.42.** Sup $C = 1$, mín $C = \dfrac{2}{3}$. Carece de máximo.

**1.43.** Máx $D = 1$, ínf $D = 0$. Carece de mínimo.

**1.44.** Inf $E = 2$, sup $E = 3$. Carece de máximo y de mínimo.

**1.45.** Inf $F = 0$. Carece de mínimo. Carece de supremo. No está acotado superiormente.

**1.46.** Máx $G = \dfrac{8}{15}$, ínf $G = 0$.

**1.47.** Inf $H = a$, sup $H = d$.

**1.48.** a) A∪B=[1,4]. Interior (A∪B)=(1,4). Adherencia (A∪B)=[1,4]. $F_i(A \cup B) = \{1, 4\}$. $F_e(A \cup B)=\{4\}$. Mín (A∪B)=1, máx (A∪B)=4.

b) A∩B=(2,3). Int (A∩B)=(2,3). Adherencia (A∩B)=[2,3]. $F_i$(A∩B)=∅, $F_e$(A∩B)={2,3}. Inf (A∩B)=2, sup (A∩B)=3.

**1.49.** Int A = (2, 3). $\overline{A}$=A∪{1}. A'=[2, 3]∪{1}. Iso (A)=$\left\{\frac{n+2}{n+1},\ n \in \mathbb{N}\right\}$. $F_i$ (A)= $\left\{\frac{n+1}{n},\ n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{3\}$. $F_e$ (A)= {1}.

## CAPÍTULO 2

**2.23.** $\sqrt{8} \cdot e^{\frac{\pi}{4} \cdot i}$.

**2.24.** $2 \cdot e^{\frac{\pi}{2} \cdot i}$.

**2.25.** $e^{\frac{\pi}{2} \cdot i}$.

**2.26.** $z_1 \cdot z_2 = (1+i)i = -1+i; \quad z_1 \cdot z_2 = \sqrt{2_{\frac{\pi}{4}}} \cdot 1_{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{2_{\frac{3\pi}{4}}}$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+i}{i} = 1-i; \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2_{\frac{\pi}{4}}}}{1_{\frac{\pi}{2}}} = \sqrt{2}_{-\frac{\pi}{4}}$$

**2.27.** $z_1 \cdot z_2 = (\sqrt{3}+i)(-1+\sqrt{3}i) = -2\sqrt{3}+2i; \quad z_1 \cdot z_2 = 2_{\frac{\pi}{6}} \cdot 2_{\frac{2\pi}{3}} = 4_{\frac{5\pi}{6}}$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{3}+i}{-1+\sqrt{3}i} = -i; \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{2_{\frac{\pi}{6}}}{2_{\frac{4\pi}{6}}} = 1_{-\frac{\pi}{2}}$$

**2.28.** $\sqrt[6]{2}_{\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3}}$, con $k = 0, 1, 2$.

**2.29.** $1_{\frac{\frac{-\pi}{2}+2k\pi}{4}}$, con $k = 0, 1, 2, 3$.

**2.30.** $2_{\frac{\pi+2k\pi}{3}}$, con $k = 0, 1, 2$.

**2.31.** $x^2 - 4x + 5 = 0$.

**2.32.** $\frac{1}{17} - \frac{4}{17} \cdot i$.

**2.33.** $-2+2i$. Raíces: $\sqrt{2}_{\frac{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}{3}}$, con $k = 0, 1, 2$.

**2.34.** $-i$ y $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot i$, $i$ y $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot i$.

**2.35.** $-1/2 \pm \sqrt{3}/2 \cdot i$.

**2.37.** $b = 0,\ a \in \mathbb{R}$.

**2.38.** $a = 0,\ b \in \mathbb{R}$ y viceversa.

**2.39.** $a = 0,\ b = 0$.

**2.41.** $\alpha = \frac{2k\pi}{1275}$.

**2.50.** $1{,}54 + 1{,}32\, i$.

**2.51.** $1{,}75\, i$.

## CAPÍTULO 3

**3.25.** $a_n = \dfrac{7n-2}{3n+4}$; límite $= \frac{7}{3}$; Convergente.

**3.26.** $a_n = (-1)^{n+1}\frac{1}{n}$; límite $= 0$; Convergente.

**3.27.** a) $\dfrac{n^2+5}{n}$; b) $a_{72} = \dfrac{5189}{72}$; c) 10; d) diverge.

**3.30.** 3.

**3.32.** 0.

**3.33.** 2.

**3.34.** 0.

**3.35.** $e$.

**3.36.** $\infty$.

**3.37.** 0.

**3.38.** 2 (Stolz).

**3.39.** $\dfrac{1}{a+1}$ (Stolz).

**3.40.** 0 (Stolz).

**3.41.** $\ln a$ (haciendo $\sqrt[n]{a} - 1 = t$).

**3.42.** $\dfrac{a-1}{\ln a}$.

**3.43.** $\sqrt{ab}$.

**3.44.** 3.

## CAPÍTULO 4

**4.42.** Divergente (criterio general).

**4.43.** Divergente (criterio general).

**4.44.** Divergente (comparación serie armónica).

**4.45.** Convergente (Raabe).

**4.46.** Divergente (D'Alambert).

**4.47.** Divergente (D'Alembert).

**4.48.** Convergente (Pringsheim).

**4.49.** Divergente.

**4.50.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$. Convergente (Raabe). Suma=$\dfrac{1}{2}$.

**4.51.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$. Convergente (Raabe). Suma=$\dfrac{1}{4}$.

**4.52.** $\dfrac{3}{2}$ (serie geométrica).

**4.53.** 12.

**4.54.** $-0{,}095$.

## CAPÍTULO 5

**5.33.** $\mathbb{R}$.

**5.34.** $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$.

**5.35.** $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \infty)$.

**5.36.** $[-1, 1]$.

**5.37.** $(-2, 0]$.

**5.38.** $(-2, 2)$.

**5.39.** $(-\infty, 2) \cup (2, \infty)$.

**5.40.** $[1, 100]$.

**5.41.** $(0, \infty) - \{k, k \in \mathbb{N}\}$.

**5.42.** $\left[\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$.

**5.43.** $\mathbb{R}$.

**5.44.** $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

**5.45.** $[-1, 1]$.

**5.46.** $\emptyset$.

**5.47.** $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

**5.48.** $f(x+1) = 12x^2 + 20x + 13$.

**5.49.** a) $f^{-1}(x) = \sqrt{\cos\frac{x}{3}}$; b) $f^{-1}(x) = \frac{1}{5}\operatorname{arc\,sen}\frac{x}{4}$.

**5.50.** $f(x+1) = 12x^2 + 20x + 13$

**5.51.** a) $f^{-1}(x) = +\sqrt{\cos\frac{x}{3}}$; b) $f^{-1}(x) = \frac{1}{5}\operatorname{arc\,cos}\frac{x}{4}$.

**5.52.** $y = 18z^2 + 24z + 8$

**5.53.** $y = \sqrt{4z - 2}$.

**5.54.** a) $(f \circ g)(x) = \frac{x^2 - 5}{x^2 - 4}$; b) $(g \circ f)(x) = \left(\frac{x}{x+1}\right)^2 - 5$.

**5.55.** $A = \operatorname{tg} x \cdot \frac{a^2 - b^2}{4}$.

**5.56.** $e^{\frac{1}{6}}$.

**5.57.** $n = 2 \cdot \ln 6$.

**5.58.** Es continua $\forall a,\ a \in \mathbb{Z}$.

**5.59.** Discontinua en $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ de una unidad de salto.

**5.60.** Discontinuidad esencial en $x = 0$.

**5.61.** Discontinua en $x = 3$, de dos unidades de salto.

**5.62.** Discontinuidad esencial en $x = 1$.

**5.63.** Discontinua en $x = 1$, de salto $-1$.

**5.64.** Discontinuidad evitable en $x = 0$.

**5.65.** $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ -1 & \text{si } x \in \mathbb{I} \end{cases}$

**5.66.** $n = 0$.

**5.67.** Continua en $x = \pm 1$. Discontinua en el resto.

**5.69.** $-2{,}0625$

## CAPÍTULO 6

**6.41.** a) $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x-1}}$; b) $f'(x) = \dfrac{-2x}{(x^2+3)^2}$.

**6.42.** a) $y' = 2x \cdot \cos x^2$; b) $y' = 2 \cdot \operatorname{sen} x \cdot \cos x$; c) $y' = 2x \cdot 2 \cdot \operatorname{sen} x^2 \cdot \cos x^2$.

**6.43.** $y' = (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{tg} x} \cdot \dfrac{\ln(\operatorname{sen} x) + \cos^2 x}{\cos^2 x}$.

**6.44.** $y' = \dfrac{\ln y - \dfrac{y}{x}}{\ln x - \dfrac{x}{y}}$.

**6.45.** $y^{(n} = (-1)^n \cdot n! \cdot \dfrac{1}{(x+2)^{n+1}}$.

**6.46.** $y^{(n} = (-1)^n \cdot n! \cdot \left[\dfrac{-1}{(x-2)^{n+1}} + \dfrac{1}{(x-3)^{n+1}}\right]$.

**6.47.** $y^{(n} = (-1)^n \cdot n! \cdot \left[\dfrac{5}{(x-2)^{n+1}} - \dfrac{3}{(x-1)^{n+1}}\right]$.

**6.48.** $y^{(n} = \begin{cases} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot 4^n \cdot \cos 4x & \text{si } n \text{ impar} \\ (-1)^{\frac{n}{2}} \cdot 4^n \cdot \operatorname{sen} 4x & \text{si } n \text{ par.} \end{cases}$

**6.49.** $y' = \dfrac{2xy - y^2}{2xy - x^2}$.

**6.50.** $y' = \dfrac{\operatorname{arc\,sen} y - y^2}{2xy - \dfrac{x}{\sqrt{1-y^2}}}$.

**6.51.** $y' = \dfrac{xy \cdot \cos x \cdot \ln(xy) + y \cdot \operatorname{sen} x - xy \cdot \ln y}{x^2 - x \cdot \operatorname{sen} x}$.

**6.55.** $a = 3$; $b = 2$.

**6.56.** $\dfrac{dy}{du} = \dfrac{2(x^2+x+1) \cdot \cos^2 x}{e^{\operatorname{tg} x} \cdot (2x+1)^2}$.

**6.57.** 1 $\left(\text{sugerencia: hacer } \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt} : \dfrac{dx}{dt}\right)$.

**6.59.** $83° \, 39' \, 35''$.

**6.61.** $n > 57{,}3$.

**6.62.** $e^{-1}$.

**6.63.** $x = 0,\ x = \pm 1$.

**6.64.** $\frac{1}{2}$ y 8.

**6.65.** $y = (4 \pm 2\sqrt{5})x$.

**6.68.** $-0,87$ cm/s.

**6.69.** a) $-0.00032$ cm/s; b) $-0.4\ \text{cm}^2/s$.

**6.70.** a) $\frac{-60}{\sqrt{7}}$ m/min; b) $2\sqrt{2}$ m; c) $\frac{8}{\sqrt{5}}$ m.

**6.71.** 2,4 unidades por segundo.

**6.72.** $x = \frac{1}{3}$.

**6.73.** $-\frac{2}{3}$ unidades por segundo.

**6.74.** $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$.

**6.75.** $a = 4;\ b = -2$.

**6.76.** Continua y no derivable en $x = 0$.

**6.77.** Continua y no derivable.

**6.78.** $3{,}1\overline{6}$.

**6.79.** $12\,\pi\ \text{dm}^3$.

**6.80.** $\alpha = 2$.

**6.82.** 2.

**6.83.** 6.

**6.84.** $-1$.

**6.85.** $\frac{1}{2}$.

**6.86.** $-\frac{1}{4}$.

**6.87.** 1.

**6.88.** 1.

**6.89.** 1.

**6.90.** 0.

**6.91.** 0.

**6.92.** $\frac{3}{4}$.

**6.93.** $e^{-2}$.

**6.94.** $e^2$.

**6.95.** $e^{\frac{1}{2}}$.

**6.96.** $\infty$.

**6.97.** $\frac{1}{3}$.

**6.98.** $e^7$.

**6.107.** $a > \frac{1}{2}$.

**6.108.** Convexa.

**6.109.** $\left(\pm\sqrt{\frac{23}{8}}, \frac{23}{4}\right)$.

**6.110.** $y - 2 = -\frac{2}{3}.(x - 3)$.

**6.111.** $3\sqrt{2}$ y $6\sqrt{2}$ cm.

**6.112.** $r = 2$ m, $b = \frac{7}{3}$ m.

**6.113.** $r = 5\sqrt{2}$ cm, $h = 10\sqrt{2}$ cm.

**6.114.** $a = 10$ cm, $b = 10$ cm.

**6.115.** $\left(\frac{2c}{15}, \frac{4c}{15}\right)$.

**6.116.** $\left(\frac{8}{3}, \frac{19}{3}\right)$.

**6.117.** $9 + \frac{9\pi}{2}$ cm$^2$.

**6.118.** Máximo en $x = -\sqrt{mn}$. Mínimo en $x = \sqrt{mn}$.

**6.119.** $r = \sqrt{\frac{200}{3}}$ cm, $\sqrt{\frac{400}{3}}$ cm.

**6.120.** El triángulo equilátero.

**6.121.** 6307.5 cm$^2$.

**6.122.** 2. arc sen $\frac{1}{3}$.

**6.123.** A un punto situado a 12 km del pie de la perpendicular trazada desde el barco a la costa.

**6.124.** $\frac{8}{\pi + 4}$ m de base y $\frac{4}{\pi + 4}$ m de altura.

**6.125.** 14.000 artículos.

## CAPÍTULO 7

**7.15.** $P(x) = 4(x-1) + 6(x-1)^2 + 4(x-1)^3 + (x-1)^4$.

**7.16.** $1 + \frac{x \cdot \ln a}{1!} + \frac{(x \cdot \ln a)^2}{2!} + \frac{(x \cdot \ln a)^3}{3!} + \cdots + \frac{(x \cdot \ln a)^n}{n!} + \cdots$

**7.17.** $x + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot x^3}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot x^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \cdots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1) \cdot x^{2n+1}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n \cdot (2n+1)} + \cdots$

**7.18.** $\frac{\pi}{2} - \left[x + \frac{x^2}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \cdots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1) \cdot x^{2n+1}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n \cdot (2n+1)} + \cdots\right]$.

**7.19.** $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{1}{(2n+1) \cdot x^{2n+1}} + \cdots$

**7.20.** $1+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{5x^4}{24}+\dfrac{64x^6}{720}+\dfrac{277x^8}{8064}+\cdots$

**7.21.** $-\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^4}{12}-\dfrac{x^6}{45}-\dfrac{17x^8}{2520}-\cdots$

**7.22.** $x-\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^5}{4}+\cdots$

**7.23.** $\ln 2+\dfrac{x-2}{2}-\dfrac{(x-2)^2}{4}+\dfrac{(x-2)^3}{4}-\dfrac{3(x-2)^4}{8}.$

**7.24.** $e+\dfrac{e}{1!}(x-1)+\dfrac{e}{2!}(x-1)^2+\dfrac{e}{3!}(x-1)^3+\dfrac{e}{4!}(x-1)^4+\dfrac{e}{5!}(x-1)^5+\dfrac{e}{6!}(x-1)^6$ $+\dfrac{e}{7!}(x-1)^7+\dfrac{e}{8!}(x-1)^8.$

**7.25.** $f(x)=3+7x+8x^2+6x^3+\dfrac{32e^{\theta x}+16(\theta x+3)e^{2\theta x}}{4!}x^4.$

**7.26.** $f(x)=1+\dfrac{x-1}{2}-\dfrac{(x-1)^2}{8}+\dfrac{(x-1)^3}{16}+\cdots$

**7.27.** $\dfrac{5\cdot 10^{-13}}{2}.$

**7.28.** $a=6.$

**7.30.** $-1.$

**7.31.** $\dfrac{60}{7}.$

**7.32.** $0{,}468\ldots.$

## CAPÍTULO 8

**8.16.** $-\ln|\cos x|+C.$

**8.17.** $\sqrt{x^2+5}+C.$

**8.18.** $\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{sen} x)+C.$

**8.19.** $\dfrac{2x-\operatorname{sen} 2x}{4}+C.$

**8.20.** $\dfrac{\operatorname{sen}^3 x}{3}+C.$

**8.21.** $\dfrac{\operatorname{arc\,sen}^2 x}{2}+C.$

**8.22.** $\dfrac{\operatorname{sen} x^2}{2}+C.$

**8.23.** $2.\operatorname{arc\,sen}\dfrac{x}{2}-2\cdot\sqrt{1-\left(\dfrac{x}{4}\right)^2}+C.$

**8.24.** $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$

**8.25.** $\operatorname{sen} x-x\cos x+C.$

**8.26.** $x\ln|x|-x+C.$

**8.27.** $2 \cdot \sqrt{x} \ln|x| - 4 \cdot \sqrt{x} + C.$

**8.28.** $\ln|\operatorname{sen} x| - \operatorname{ctg} x + C.$

**8.29.** $\frac{x}{2}\,[\operatorname{sen}(\ln|x|) - \cos(\ln|x|)] + C.$

**8.30.** $\frac{3}{2}\ln|x^2 - 4x + 5| + 4 \cdot \operatorname{arc\,tg}(x-2) + C.$

**8.31.** $\frac{(x + \sqrt{1-x^2}) \cdot e^{\operatorname{arc\,sen}\, x}}{2} + C.$

**8.32.** $x \cdot \operatorname{tg} x + \ln|\cos x| + C.$

**8.33.** $\frac{2}{5} \cdot \sqrt{(1+x)^5} - \frac{2}{3} \cdot \sqrt{(1+x)^3} + C.$

**8.34.** $\frac{1}{8}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\ln|x+1| + \frac{9}{8}\ln|x+3| + C.$

**8.35.** $\frac{1}{2}\ln|x| - \ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x-2| + C.$

**8.36.** $\frac{x-3}{2(x^2+1)} + \ln(x^2+1) - \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x + C.$

**8.37.** $\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x + \frac{x}{2(x^2+1)} + C.$

**8.38.** $\ln|1 + \operatorname{tg} x| - \frac{1}{2}\ln(1 + \operatorname{tg}^2 x) + C.$

**8.39.** $\ln(\cos x) + \frac{1}{2 \cdot \cos^2 x} + C.$

**8.40.** $-\sqrt{\frac{1+x^2}{x^2}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{1+x^2}{x^2}}} + C.$

**8.41.** $x - \ln(x+2)^2 + C.$

**8.42.** $\frac{2}{3}\left(\sqrt{x^3-1} - \operatorname{arc\,tg}\sqrt{x^3-1}\right) + C.$

**8.43.** $x + \ln\left|1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right| + \frac{1}{4}\left(1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right) + C.$

**8.44.** $4\ln(\sec x + \operatorname{tg} x) - 4\ln(\cos x) - 3\operatorname{sen} x - \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x + C.$

**8.45.** $\operatorname{arc\,sen}(2x^2) + C.$

**8.46.** $\frac{2}{3}\sqrt{(\operatorname{arc\,sen} x)^3} + C.$

**8.47.** $(x-1)\ln\left|1 - \sqrt{x}\right| - \frac{x}{2} + \sqrt{x} + C.$

**8.48.** $\left(\frac{x^4}{4} - 1\right)\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{2} - \frac{x^3}{6} + 2x + C.$

**8.49.** $x\operatorname{arc\,sen} x + \ln\left|\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}\right| + C.$

**8.50.** $\frac{-x}{3\sqrt{x^2-3}} + C.$

## CAPÍTULO 9

**9.19.** $\frac{64}{3}$ u. s.

**9.20.** 9 u. s.

**9.21.** $\pi ab$ u. s.

**9.22.** $2\int_0^2 \left(\sqrt{8-x^2}-\frac{x^2}{2}\right) dx = 2\pi + \frac{4}{3}$ u. s., $6\pi - \frac{4}{3}$ u. s.

**9.23.** $\frac{16\pi}{3}$.

**9.24.** $2\pi \int_0^3 \frac{dx}{1+x^2} = 2\pi \cdot \operatorname{arc\,tg} 3$ u. v.

**9.25.** $\pi \int_0^4 [6^2 - (6 - 4x + x^2)]\, dx = \frac{1408\pi}{15}$ u. v.

**9.26.** $2\pi \int_0^4 \left(2 - \frac{y^2}{8}\right) dy = \frac{256\pi}{15}$ u. v.

**9.27.** a) $2\pi \int_0^4 \left(4 - \frac{y^4}{64}\right) dy = \frac{128\pi}{5}$ u. v.; b) $4\pi \int_0^2 x\sqrt{8x}\, dx = \frac{128\pi}{5}$ u. v.

**9.28.** $2\pi \int_{-3}^1 (x^3 - x^2 - 9x + 9)\, dx = \frac{256\pi}{3}$ u. v.

**9.29.** Considerando el círculo $x^2 + y^2 = r^2$:

a) $2\pi \int_0^r (r^2 - x^2)\, dx = \frac{4}{3}\pi r^3$ u. v.

b) $4\pi \int_0^r y.\sqrt{r^2 - y^2}\, dy = \frac{4}{3}\pi r^3$ u. v.

**9.30.** Mediante anillos, $2\pi \int_0^1 x \cdot e^{-x^2}\, dx = \pi\left(1 - \frac{1}{e}\right)$ u. v; mediante discos, $\frac{\pi}{e} + \int_{\frac{1}{e}}^1 \pi \cdot (-\ln y)\, dy = \pi\left(1 - \frac{1}{e}\right)$ u. v.

**9.31.** $\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 2x\, dx = \frac{\pi^2}{4}$ u. v.

**9.32.** Se considera la recta $y = \frac{rx}{h}$, que pasa por $(0, 0)$ y $(h, r)$:

a) $\pi \int_0^h \frac{r^2x^2}{h^2}\, dx = \frac{\pi r^2 h}{3}$ u. v.

b) $2\pi \int_0^r \left(hy - \frac{hy^2}{r}\right) dy = \frac{\pi r^2 h}{3}$ u. v.

**9.33.** Considerando la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$: $L = 4\int_0^r \frac{r \cdot dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} = 2\pi r$ u. l.

**9.34.** $\frac{\pi}{2} + 2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{cosec} x dx = \frac{\pi}{2} + 2 \cdot \ln\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}\right)$ u. l.

**9.35.** $\int_0^{16} 4x\sqrt{64 - (x-8)^2}\, dx = 1024\pi$ u. v.

## CAPÍTULO 10

**10.17.** $\infty$.

**10.18.** $\frac{1}{2}$.

**10.19.** 1.

**10.20.** 8,84834.

**10.21.** $\frac{105}{16}$

**10.22.** $\frac{1}{4}\,B\left(\frac{1}{4},\frac{3}{2}\right)$.

**10.23.** $\frac{1}{4}\,B\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$.

**10.24.** $4\,B\left(4,\frac{1}{2}\right)$.

**10.25.** $\frac{1}{2}\,B\left(\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right)$.

## CAPÍTULO 11

**11.26.** Todo el plano salvo la recta $x - y = 0$.

**11.27.** $[-1, 1] \times [-1, 1]$.

**11.28.** Exterior y borde de la parábola $y = x^2$, con $y \geq 0$.

**11.29.** Exterior de la parábola $y = -x^2$.

**11.30.** $\{[0, \infty) \times [2k\pi, (2k+1)\pi]\} \cup \{[-\infty, 0] \times [(2k+1)\pi, (2k+2)\pi]\}$.

**11.31.** $\mathbb{R} \times [0, \infty)$.

**11.32.** $\mathbb{R} - (0, 0)$.

**11.37.** Continua en $(0, 0)$.

**11.38.** $\frac{\partial z}{\partial x} = e^{x+\operatorname{sen} y}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \cos y \cdot e^{x+\operatorname{sen} y}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = e^{x+\operatorname{sen} y}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \cos y \cdot e^{x+\operatorname{sen} y}$;
$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\operatorname{sen} y \cdot e^{x+\operatorname{sen} y} + \cos^2 y \cdot e^{x+\operatorname{sen} y}$.

**11.39.** $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{x^2+y^2}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{x^2+y^2}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{-xy}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{y^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$;
$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{x^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$.

**11.40.** $x - y - 2z + 6 = 0$.

**11.41.** $dz = (2x - 2y)\,dx + (3y^2 - 2x)dy$.

**11.42.** $dz = y\,dx + x\,dy$.

**11.43.** $dS = \frac{77\pi}{8\sqrt{41}}$ cm$^2$.

**11.44.** 4,998.

**11.49.** Mínimo en $(1, -3/2)$. $p = 5/4$.

**11.50.** Cubo de arista 2 cm.

**11.51.** $3, 3$ y $3$.

**11.52.** El baricentro del triángulo que forman los tres puntos.

**11.53.** Un triángulo equilátero.

**11.54.** $\sqrt{3}$

**11.55.** $64/9$ u. v.

**11.56.** $\dfrac{54}{9}$ u. v.

**11.57.** Mínimo en $(1, 1, 0)$.

## CAPÍTULO 12

**12.19.** $\displaystyle\int_{-1}^{1}\int_{-x^2}^{x^2} (x^2 - y)\, dydx = 4/5.$

**12.20.** $\displaystyle\int_{0}^{1}\int_{y^2}^{\sqrt{y}} xy\, dxdy = 1/12.$

**12.21.** $\displaystyle 4\int_{0}^{a}\int_{0}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} dydx = \pi ab.$

**12.22.** $\displaystyle 2\int_{0}^{1}\int_{0}^{\sqrt{9x}} dydx + 2\int_{1}^{\sqrt{10}}\int_{0}^{\sqrt{10-x^2}} dydx = 27/2.$

**12.23.** $\displaystyle\int_{0}^{3}\int_{0}^{x/3} dydx = \frac{e^9 - 1}{6}.$

**12.24.** Invirtiendo el orden: $\displaystyle\int_{0}^{1}\int_{0}^{y^3} dxdy = \frac{1}{3}\,(e - 1).$

**12.25.** $\displaystyle\int_{1}^{2}\int_{0}^{\ln y} e^{-x}\, dxdy = 1 - \ln 2.$ Invirtiendo el orden: $\displaystyle\int_{0}^{\ln 2}\int_{e^x}^{2} e^{-x}\, dydx = 1 - \ln 2.$

**12.26.** Despejando: $x = (u + v)/3$, $y = (2u - v)/3$. El recinto $S$ se transforma en el rectángulo de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 3)$ y $(1, 3)$: $\displaystyle\int\int_{B} u^2\, |J|\, dvdu = \frac{1}{3}\int_{0}^{1}\int_{0}^{3} u^2\, dvdu = 1/3.$

**12.27.** Mediante los cambios: $x^2 + y^2 = u$, $x^2 - y^2 = v$, el recinto $S$ se transforma en el rectángulo de vértices $(4, 1)$, $(9, 1)$, $(4, 4)$ y $(9, 4)$. Despejando $x$ e $y$, $x = \sqrt{(u + v)/2}$, $y = \sqrt{(u - v)/2}$:
$$\int_{1}^{4}\int_{4}^{9} \frac{\sqrt{u^2 - v^2}}{2}\,\frac{1}{4\sqrt{u^2 - v^2}}\, dvdu = 15/8.$$

**12.28.** Pasando a coordenadas esféricas, $S^* = \{(\rho, \theta, \varphi)/\ 0 \le \rho \le 3, 0 \le \theta \le \pi/2,\ 0 \le \varphi \le \pi/2\}$.
Por tanto: $\displaystyle\int_{0}^{3}\int_{0}^{\pi/2}\int_{0}^{\pi/2} \rho\cos\varphi\cos\theta\ \rho\cos\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta\ \rho\,\mathrm{sen}\,\varphi\ \rho^2\cos\varphi\ d\varphi d\theta d\rho = 243/16.$

**12.29.** $\displaystyle\int_{0}^{3}\int_{-1}^{2}\int_{2-x}^{4-x^2} dzdxdy = 13.5$ u. v.

**12.30.** $\displaystyle\int_{0}^{1}\int_{0}^{\sqrt{x}}\int_{0}^{1-x} x\, dzdydx.$

**12.31.** Pasando a coordenadas cilíndricas: $\int_0^{2\pi}\int_0^2\int_{r^2/2}^2 (r^2)^2\, r\, dz dr d\theta = 32/3.$

**12.32.** $8\int_0^a\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dz dy dx.$

**12.33.** Pasando a coordenadas esféricas:

$$8\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\int_0^r \rho^2\cos^2\theta\cos^2\varphi\,\rho^2\cos\varphi\, d\rho d\varphi d\theta = 4\pi r^5/15.$$

**12.34.** a) $4\int_0^4\int_0^{\sqrt{4z}}\int_0^{\sqrt{4z-x^2}} dy dx dz$; b) $4\int_0^4\int_{y^2/4}^4\int_0^{\sqrt{4z-y^2}} dx dz dy.$

**12.35.** Pasando a coordenadas cilíndricas:

$$\int_0^a\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{h(a-r)}{a}} (r^2\operatorname{sen}^2\theta + z^2)\, r\, dz d\theta dr = \frac{ha^2\pi(3a^2+2h^2)}{60}.$$

**12.36.** $\int_0^2\int_0^6\int_0^{4-x^2} dz dy dx = 32$ u. v.

**12.37.** En coordenadas cilíndricas: $\int_0^{\pi}\int_0^{8\operatorname{sen}\theta}\int_0^z \rho\, dz d\rho d\theta = 96\pi$ u. v.

## CAPÍTULO 13

**13.14.** Primer orden y primer grado.

**13.15.** Segundo orden y primer grado.

**13.16.** Primer orden y tercer grado.

**13.17.** $ye^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C = 0$ (lineal).

**13.18.** $y^2(x^2-1) = x^2 + C$ (variables separables).

**13.19.** $y = 2\frac{C}{\operatorname{sen} x}$ (lineal).

**13.20.** $x = Ce^{\frac{x}{y}}$ (homogénea).

**13.21.** $x^2 + y\ln|y| + y^2 + Cy = 0$ (factor integrante).

**13.22.** $1 + y^2x^4 = Cx^2y^2$ (Bernouilli).

**13.23.** $\cos\frac{y}{x} + \ln|x| = C$ (homogénea).

**13.24.** $e^{\frac{y}{x}} + \ln|x| = C$ (homogénea).

**13.25.** $xy^2 - y^3 - C(x+y)$ (homogénea).

**13.26.** $y = x^2e^{-\frac{1}{xy}} + C$ (variables separables).

**13.27.** $x^2 + y^2 + xy = C$ (exacta y homogénea).

**13.28.** $x^2 - y^2 = C,\ x^2 + y^2 = C.$

**13.29.** $y^2 = 4x - 2x^2 + C.$

**13.30.** $y = Ce^{x/y}$.

**13.31.** $y = x^3/3 + C$, $y = x^3/3$.

**13.32.** $\ln x^2 + y/x = C$.

**13.33.** $x = Cy^2$.

**13.34.** $x^2 + y^2 + 2Cx + (C^2 - 25) = 0$.

**13.35.** $y = C_1 e^x + C_2 x e^x + x^2 + 4x + 5$.

**13.36.** $y = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x \ln(\operatorname{sen} x) - x \cos x$.

## CAPÍTULO 14

**14.20.** a) $1/3(-x^3 + 3x^2 + 4x - 3)$; b) $-1/8$.

**14.21.** a) $1{,}08\overline{3}$; b) 1,1; c) 1.0986.

**14.22.** a) 1,1167; b) 1,1; c) 1,096.

**14.23.** a) 3,9881; b) 3,9895; c) 3,9895.

**14.24.** a) 3,9828; b) 4,0415; c) 4,0472.

**14.25.** a) 0,7430; b) 0,7469.

**14.26.** 3507 u. s.

**14.27.** 2,6310.

**14.28.** 0,5639.

# BIBLIOGRAFÍA

[1] APOSTOL T.M., *Calculus*. Reverté, Barcelona, 1972.

[2] AYRES F., *Cálculo diferencial e integral*. McGraw-Hill, México, 1970.

[3] BERMAN G.N., *Problemas y ejercicios de Análisis Matemático*. Mir, Moscú, 1983.

[4] BRONTE R., *Cálculo infinitesimal e integral*. Litoprint, Madrid, 1977.

[5] DANKO P. y POPOV A., *Ejercicios y Problemas de Matemáticas Superiores*. Paraninfo, Madrid, 1985.

[6] DEDEKIND R., *¿Qué son y para qué sirven los números?*. Alianza Editorial, Madrid, 1998.

[7] GARCIA CASTRO F. y GUTIERREZ A., *Cálculo Infinitesimal*. Pirámide, Madrid, 1980.

[8] GRANERO F., *Cálculo*. McGraw-Hill, Madrid, 1991.

[9] GRANVILLE W.A. Y OTROS, *Cálculo Diferencial e Integral*. Uteha, México, 1970.

[10] JOHNSON R.M., *Calculus*. Ellis Horwood, New York, 1987.

[11] KREYSZIG E., *Advanced Engineering Mathematics*. John Wiley & Sons, USA, 1988.

[12] LANG S., *Análisis Matemático*. Fondo Educativo Interamericano, México, 1983.

[13] LINES E., *Principios de Análisis Matemático*. Reverté, Barcelona, 1983.

[14] MARKUSHEVICH A.I., *Números complejos y aplicaciones conformes*. Mir, Moscú, 1983.

[15] MOYA J. y MORENO D., *Problemas de Cálculo Infinitesimal y Numérico*. ICE, Madrid, 1974.

[16] PITA RUIZ C., *Cálculo Vectorial*. Prentice Hall, México, 1995.

[17] PUIG ADAM P., *Cursos Téorico-Prácticos de Cálculo*. Biblioteca Matemática, Madrid, 1972.

[18] SPIVAK M., *Calculus*. Reverté, Barcelona, 1977.

[19] DE LA VILLA A. Y OTROS, *Cálculo I y II* (dos tomos). Madrid, CLAGSA, 1994.

www.elsolucionario.net

# ÍNDICE ALFABÉTICO